Gheorghe PROCOPIUC **Mihai ISPAS**

P R O B L E M E
d e
A N A L I Z Ă
M A T E M A T I C Ă

IAŞI 2002

Prefaţă

Prezenta culegere de **Probleme de analiză matematică** se adresează studenţilor din facultăţile de profil tehnic. Ea conţine aceleaşi capitole ca şi cursul de **Analiză matematică**, format electronic, situat pe acelaşi site. Inainte de abordarea oricărui capitol din această culegere se recomandă parcurgerea capitolului corespunzător al cursului, unde pot fi găsite noţiunile şi rezultatele teoretice utilizate în formularea şi rezolvarea problemelor propuse.

Culegerea pune la dispoziţia studenţilor exerciţii şi probleme rezolvate, cu indicaţii de rezolvare sau propuse spre rezolvare, constituind un material util în desfăşurarea seminariilor, dar şi pentru o mai bună aprofundare a noţiunilor predate la curs.

Autorii

Cuprins

Capitolul 1

Elemente de teoria spaţiilor metrice

1.1 Spaţii metrice

1.1 *Fie* $(G, +)$ *un grup comutativ şi* $p : G \to \mathbf{R}_+$ *o funcţie ce satisface proprietăţile:*
1) $p(x) = 0$ *d.d.* $x = 0$*;*
2) $p(-x) = p(x)$, $\forall x \in G$*;*
3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in G$.
Să se arate că aplicaţia $d : G \times G \to \mathbf{R}$, $d(x, y) = p(x - y)$, $\forall x, y \in G$ *este o metrică pe* G.

R: Verificăm că d satisface axiomele metricii: 1^o. $d(x, y) = p(x - y) \leq 0$, $\forall x, y \in G$ pentru că $x - y = x + (-y) \in G$ şi $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow p(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$; 2^o. $d(x, y) = p(x - y) = p(-x + y) = p(y - x) = d(y, x)$; 3^o. $d(x, y) = p(x - y) = p(x - z + z - y) \leq p(x - z) + p(z - y) = d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in G$.

1.2 *Fie* $\mathbf{N}$ *mulţimea numerelor naturale. Să se arate că următoarele aplicaţii sunt distanţe pe* $\mathbf{N}$*:*
1) $d : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$, $d(m, n) = |m - n|$, $\forall m, n \in \mathbf{N}$.
2) $d : \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}_+$, $d(m, n) = \left| \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} \right|$, $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$.
3) $d : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$, $d(m, n) = \left| \dfrac{m}{1 + m} - \dfrac{n}{1 + n} \right|$, $\forall m, n \in \mathbf{N}$.

1.3 *Fie* $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$, *produsul cartezian constând din* $n \geq 1$ *factori şi* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. *Să se arate că aplicaţiile:* $d, \delta, \Delta : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$, *definite prin:*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},\ \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,\ \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k - y_k|$$

sunt metrici pe $\mathbf{R}^n$.

R: Pentru d se aplică inegalitatea lui Minkowski:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2},\ \forall \mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\ \mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n).$$

1.4 *Să se haşureze în* $\mathbf{R}^2$ *sferele deschise* $S(0,r)$, $r>0$, *relative la metricile* d,δ,Δ.

1.5 *Să se arate că* d,δ,Δ *sunt metrici echivalente pe* $\mathbf{R}^n$.

R: Se demonstrează inegalităţile: $\Delta \leq \delta \leq \sqrt{n}\cdot d \leq n\cdot\Delta \leq n\cdot\delta \leq n\sqrt{n}\cdot\delta$.

1.6 *Să se arate că* $d:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$, $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$ *este o metrică pe* $\mathbf{R}$.

R: Se ţine seama că oricare ar fi $a,b,c\geq 0$ cu $a\leq b+c$, avem:

$$\frac{a}{1+a}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c},$$

deoarece din $0\leq\alpha\leq\beta$ urmează $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\leq\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

1.7 *Fie* $d: X\times X\to\mathbf{R}_+$ *o metrică pe* X. *Să se arate că aplicaţia* $\delta: X\times X\to\mathbf{R}_+$ *definită prin* $\delta(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ *este de asemenea o metrică pe* X.

1.8 *Să se arate că într-un spaţiu metric* (X,d) *avem:*

1) $d(x_1,x_n)\leq\sum\limits_{i=1}^{n}d(x_i,x_{i+1})$, $\forall x_1,\ldots,x_n\in X$, $N\geq 2$.
2) $|d(x,z)-d(z,y)|\leq d(x,y)$, $\forall x,y,z\in X$.
3) $|d(x,y)-d(x',y')|\leq d(x,x')+d(y,y')$, $\forall x,x',y,y'\in X$.

R: 3) $d(x,y)\leq d(x,x')+d(x',y)\leq d(x,x')+d(x',y')+d(y',y)$.

1.9 *Fie* X *o mulţime nevidă. Să se arate că aplicaţia* $d: X\times X\to\mathbf{R}$, *definită prin:*

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

este o metrică pe X *(metrica discretă pe* X*).*

1.10 *Să se arate că aplicaţia* $d:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$, *definită prin:*

$$d(x,y)=\begin{cases}x+y, & x\neq y,\\ 0, & x\neq y\end{cases}$$

este o metrică pe $\mathbf{R}_+$.

1.11 *Să se arate că aplicaţia* $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, *definită prin:*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

$\forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ *este o metrică pe* $\mathbf{R}^n$.

1.12 *Să se arate că următoarele aplicaţii sunt metrici pe mulţimile indicate:*

1) $d(0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbf{R}$, $d(x,y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$.

2) $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $d(x,y) = \left|\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}\right|$.

3) $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & x_1 = y_1, \\ |x_2| + |y_2| + |x_1 - y_1|, & x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

(metrica mersului prin junglă), unde: $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

4) $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - y_2)^2}, & \text{dacă există o dreaptă } \delta \subset \mathbf{R}^2 \text{ a.î. } \mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \delta, \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \text{în rest,} \end{cases}$$

(metrica căii ferate franceze), unde: $\mathbf{0} = (0,0)$, $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

1.13 *Să se arate că următoarele aplicaţii sunt norme pe* $\mathbf{R}^n$:

1) $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$, $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

2) $||\mathbf{x}|| = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$, $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

3) $||\mathbf{x}|| = \sup |x_k|$, $k = \overline{1,n}$, $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

1.14 *Fie* $\mathcal{M} = \{A = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}$, *cu* $a, b, c \in \mathbf{R}$, $i^2 = -1\}$ *şi* $f : \mathcal{M} \to \mathbf{R}_+$, $f(A) = \sqrt{\det A}$. *Să se arate că* $(\mathcal{M}, ||\cdot||)$ *este spaţiu normat în raport cu norma dată prin* $||A|| = f(A)$.

1.15 *Fie* $\mathcal{C}^0_{[1,e]} = \{f : [1,e] \to \mathbf{R},\ f$ *continuă pe* $[1,e]\}$. *Să se arate că aplicaţia* $||\cdot|| : \mathcal{C}^0_{[1,e]} \to \mathbf{R}$ *definită prin* $||f|| = \left[\int_1^e (f^2(x) \cdot \ln x)\, dx\right]^{1/2}$ *este o normă pe* $\mathcal{C}^0_{[1,e]}$ *şi să se găsească norma funcţiei* $f(x) = \sqrt{x}$.

1.16 *Fie* $\mathcal{C}^1_{[0,1]} = \{f : [0,1] \to \mathbf{R},\ f$ *derivabilă cu derivată continuă pe* $[0,1]\}$. *Să se arate că următoarele aplicaţii sunt norme pe* $\mathcal{C}^1_{[0,1]}$:

1) $||f|| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. 2) $||f|| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$.

3) $||f|| = |f(0)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. 4) $||f|| = \left[\int_0^1 f^2(x)\, dx\right]^{1/2}$.

1.17 *Fie mulţimea* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *şi clasele:*

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$
$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

1) *Să se arate că* τ_1 *este topologie pe* X *dar* τ_2 *nu este topologie pe* X*.*
2) *Să se găsească sistemele de vecinătăţi ale punctelor* 3 *şi* 4 *din spaţiul topologic* (X, τ_1)*.*

R: Se verifică proprietăţile din definiţia topologiei. Pentru τ_2 se constată că, de exemplu $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \tau_2$.

1.18 *Fie* $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ *şi familia de mulţimi:*

$$\tau = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, X\}.$$

Să se arate că τ *este o topologie pe* X *şi să se determine sistemele de vecinătăţi ale punctelor* α*,* β*,* γ *şi* δ*.*

1.19 *Dacă* $X \neq \emptyset$ *şi* $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$*, atunci* (X, τ_0) *este spaţiu topologic pe* X*, numit spaţiul topologic* nondiscret *(grosier) pe* X*.*

1.20 *Dacă* $X \neq \emptyset$ *şi* $\mathcal{P}(X)$ *este mulţimea tuturor părţilor mulţimii* X*, iar* $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$*, atunci* (X, τ_1) *este spaţiu topologic pe* X*, numit spaţiul topologic* discret *pe* X*.*

1.21 *Dacă* X *are mai mult de două elemente şi* $a \in X$*, fixat, atunci* $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ *este o topologie pe* X*, diferită de topologia nondiscretă şi de cea discretă.*

1.22 *Fie* $X = \{a, b, c, d, e\}$*. Să se precizeze care dintre următoarele familii de părţi ale lui* X *este o topologie pe* X*:*
1) $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$.
2) $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.
3) $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

R: τ_1 şi τ_2 nu, τ_3 da.

1.23 *Fie* $\tau = \{\emptyset, \mathbf{R}, (q, \infty)\}$*,* $q \in \mathbf{Q}$*. Să se arate că* τ *este o topologie pe* $\mathbf{R}$*.*

R: Mulţimea $A = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \{(q, \infty),\ q > \sqrt{2}\} = (\sqrt{2}, \infty)$ este o reuniune de mulţimi din τ, totuşi ea nu aparţine lui τ deoarece $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

1.24 *Pe mulţimea* $X = \{a, b, c\}$ *următoarele familii de părţi ale lui* X *sunt topologii:*

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}; \quad \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\};$$
$$\tau_3 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}\}; \quad \tau_4 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}.$$

1.25 *Fie* $\tau = \{\emptyset, \mathbf{R}, (-\alpha, \alpha)\}$*,* $\alpha > 0$*. Să se arate că* τ *este o topologie pe* $\mathbf{R}$*.*

1.26 *Pe mulţimea* $X = \{1,2,3,4,5\}$ *se consideră topologia:*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,5\}\}.$$

1) *Să se găsească punctele interioare ale mulţimii* $A = \{1,2,3\}$.
2) *Să se găsească punctele exterioare ale mulţimii* A.
3) *Să se găsească punctele frontieră ale mulţimii* A.

R: 1) $\mathrm{Int}\, A = \{1,2\}$ deoarece $1 \in \{1,2\} \subset A$, $2 \in \{1,2\} \subset A$. 3 nu este punct interior lui A deoarece nu aparţine la nici o mulţime deschisă inclusă în A. 2) $\mathcal{C}A = \{4,5\}$ şi $\mathrm{Int}\, \mathcal{C}A = \emptyset$, deci nu există puncte exterioare lui A. 3) $\mathrm{Fr}\, A = \{3,4,5\}$.

1.27 *Să se arate că următoarele familii de părţi sunt topologii pe* $\mathbf{R}$*:*
1) $\tau_i = \{\emptyset, \mathbf{R}, (a,\infty)\}$, $\forall a \in \mathbf{R}$, *(topologia* inferioară *sau dreaptă a lui* $\mathbf{R}$*).*
2) $\tau_s = \{\emptyset, \mathbf{R}, (-\infty,a)\}$, $\forall a \in \mathbf{R}$, *(topologia* superioară *sau stângă a lui* $\mathbf{R}$*).*

1.28 *Să se găsească interiorul, exteriorul şi frontiera intervalului* $I = [3,\infty)$ *relativ la spaţiul topologic* $(\mathbf{R}, \tau_i)$*, unde* τ_i *este topologia inferioară pe* $\mathbf{R}$.

R: Cea mai amplă mulţime deschisă, conţinută în I, este $(3,\infty)$, deci $\mathrm{Int}\, A = (3,\infty)$. $\mathcal{C}I = (-\infty,3)$ şi nu conţine nici o altă mulţime deschisă în afară de mulţimea vidă. $\mathrm{Int}\, \mathcal{C}A = \emptyset$, $\mathrm{Fr}\, A = (-\infty,3]$.

1.2 Mulţimea numerelor reale

1.29 *Să se arate că mulţimea* $A = \{x_n = \sqrt[n]{n} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} + \dfrac{1}{n} + 1,\ n \in \mathbf{N},\ n \geq 2\}$ *este mărginită.*

R: Din $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ pentru orice număr real pozitiv, rezultă $x_n > 2 + 0 + 1 = 3$, adică $a = 3$ este un minorant pentru A. Cum pentru $n \geq 2$, $1 < \sqrt[n]{n} < 2$ şi $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}$, urmează $x_n < 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{9}{2}$, adică $b = \dfrac{9}{2}$ este un majorant pentru A.

1.30 *Să se arate că mulţimea* $A_\alpha = \{y \in \mathbf{R},\ y = \dfrac{\alpha x + 1}{x^2 + x + 2},\ x \in \mathbf{R}\}$ *este mărginită pentru orice* $\alpha \in \mathbf{R}$ *şi să se determine* $\inf A_\alpha$ *şi* $\sup A_\alpha$.

R: Fie $y \in A_\alpha$. Atunci: $yx^2 + (y-\alpha)x + 2y - 1 = 0$, care trebuie să aibă soluţii reale. Deci $(y-\alpha)^2 - 4y(2y-1) = -7y^2 - 2(\alpha-2)y + \alpha^2 \geq 0$, de unde, notând cu $\beta = 2\sqrt{2\alpha^2 - \alpha + 1}$,:

$$y \in \left[\frac{2-\alpha-\beta}{7}, \frac{2-\alpha+\beta}{7}\right].$$

Aşadar:

$$\inf A_\alpha = \min A_\alpha = \frac{2-\alpha-\beta}{7},\ \ \sup A_\alpha = \max A_\alpha = \frac{2-\alpha+\beta}{7}.$$

1.31 *Să se determine minoranţii, majoranţii, cel mai mic element şi cel mai mare element (dacă există) ale următoarelor mulţimi de numere reale:*

1) $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$. 2) $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$.
3) $A = \left\{\frac{2^n - 1}{2^2 + 1}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$. 4) $A = \{x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 5\}$.
5) $A = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 0,\ x^2 > 5\}$. 6) $A = \{x \in \mathbf{R}, x^3 - x \leq 0\}$.
7) $A = \{x - \sin x,\ x \in \mathbf{R}\}$.

R: 1) Cum: $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$, $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$, deoarece: $0 < \pi - 3 < 1 < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$ şi funcţia sinus este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă:

$$\sin 0 < \sin(\pi - 3) < \sin 1 < \sin(\pi - 2) < \sin\frac{\pi}{2}$$

şi deci $0 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2 < 1$. Aşadar: $\min A_1 = \sin 3$, $\max A_1 = \sin 2$ şi orice număr $a \leq \sin 3$ este un minorant, iar orice număr $b \geq \sin 2$ este un majorant.

2) Deoarece $\frac{1}{n} \leq 1$, rezultă că $1 - \frac{1}{n} \geq 0$. Deci 0 este un minorant al mulţimii A_2 şi orice număr $a \in (-\infty, 0]$ eare minorant. Nici un număr $a > 0$ nu poate fi minorant al mulţimii A_2 deoarece $0 \in A_2$ şi din definiţia minorantului ar rezulta că $a \leq 0$ (contradicţie). Evident $\inf A_2 = \min A_2 = 0$. Mulţimea majoranţilor este $[1, \infty)$. Intradevăr, $b \geq 1$ implică $b \geq 1 - \frac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Dacă $b < 1$ rezultă $1 - b > 0$ şi atunci $\exists n \in \mathbf{N}^*$ a.î. $1 - b > \frac{1}{n}$ sau $b < 1 - \frac{1}{n}$, adică b nu ar mai fi majorant. Evident $\sup A_2 = 1$, în timp ce $\max A_2$ nu există.

3) Din inegalitatea:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2^n - 1}{2^2 + 1} < 1,\ n \in \mathbf{N}^*,$$

deducem că mulţimea minioranţilor lui A_3 este $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, mulţimea majoranţilor este $[1, \infty)$, $\inf A_3 = \min A_3 = \frac{1}{3}$, $\sup A_3 = 1$, iar $\max A_3$ nu există.

4) $\inf A_4 = \min A_4 = -\sqrt{5}$, $\sup A_4 = \max A_4 = \sqrt{5}$,
5) $\inf A_5 = \sqrt{5}$, $\sup A_5 = \infty$, 6) $\inf A_6 = -\infty$, $\sup A_6 = \infty$,
7) $\inf A_7 = -\infty$, $\sup A_7 = \infty$.

1.32 *Să se determine* $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ *şi* $\max A$ *dacă:*

1) $A = \left\{x \in \mathbf{R},\ x = \frac{a + 1}{a^2 + a + 1},\ a \in \mathbf{R}\right\}$.
2) $A = \left\{y \in \mathbf{R},\ y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1},\ x \in \mathbf{R}\right\}$.
3) $A = \left\{y \in \mathbf{R},\ y = \frac{3x^2 + 4x\sqrt{3} - 1}{x^2 + 1},\ x \in \mathbf{R}\right\}$.

R: 1) Din $xa^2 + (x-1)a + x - 1 = 0$, cu $a \in \mathbf{R}$, rezultă $A = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$. Deci $\inf A = \min A = -\frac{1}{3}$, $\sup A = \max A = 1$. 2) $A = \left[\frac{9 - 2\sqrt{21}}{3}, \frac{9 + 2\sqrt{21}}{3}\right]$. 3) $A = [-3, 5]$.

1.33 *Utilizând axioma lui Arhimede, să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$ există $n \in \mathbf{Z}$ a.î. să avem:*

$$1)\ x^2 + n \geq nx + 1. \quad 2)\ x^2 \geq 2x + n.$$

R: 1) Inegalitatea se mai scrie: $x^2 - 1 \geq n(x-1)$. Pentru $x = 1$ este evidentă. Dacă $x \neq 1$, pentru numărul real $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$, conform axiomei lui Arhimede, există $n \in \mathbf{Z}$ a.î. $x + 1 \geq n$.

1.34 *Fie $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in \mathbf{N}^*$ un şir descendent de segmente reale. Să se arate că:*

1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ *(Cantor-Dedekind).*

2) *Dacă $b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci există un număr $x_0 \in \mathbf{R}$,* unic *determinat, cu proprietatea că: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x_0\}$.*

R: 1) Din $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ rezultă că $a_n \leq b_m$, $\forall n, m \in \mathbf{N}^*$. Aşadar mulţimea $A = \{a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ este mărginită superior (orice b_m este un majorant), iar mulţimea $B = \{b_m, m \in \mathbf{N}^*\}$ este mărginită inferior (orice a_n este un minorant). Există deci $\sup A$ şi $\inf B$ şi $\sup A \leq \inf B$. In concluzie, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \supset [\sup A, \inf B] \neq \emptyset$.

2) Dacă ar exista x şi y cu $x < y$ şi $x, y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, atunci din $a_n \leq x < y \leq b_n$ rezultă: $0 < y - x \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$, adică $n(y - x) \leq 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce ar contrazice axioma lui Arhimede aplicată numerelor $y - x$ şi 1.

1.35 *Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ şi $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.*

R: Folosim metoda inducţiei matematice. $P(2)$: dacă $a_1, a_2 \in \mathbf{R}_+^*$ şi $a_1 \cdot a_2 = 1$, atunci $a_1 + a_2 \geq 2$. Fie $a_1 \geq 1$ şi $a_2 \leq 1$. Urmează $(a_1 - 1)(a_2 - 1) \leq 0$ sau $a_1 + a_2 \geq 1 + a_1 \cdot a_2 \geq 2$.

$P(n)$: dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ şi $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.

$P(n+1)$: dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbf{R}_+^*$ şi $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq n + 1$.

Printre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ există cel puţin unul mai mare sau cel puţin egal cu 1 şi cel puţin unul mai mic sau cel mult egal cu 1. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că acestea sunt a_1 şi a_2. Din $P(2)$ avem că $a_1 + a_2 \geq 1 + a_1 \cdot a_2$, de unde deducem:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq 1 + a_1 \cdot a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq 1 + n,$$

deoarece $a_1 \cdot a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sunt n numere al căror produs este 1.

1.36 Inegalitatea mediilor. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$ şi A media aritmetică, G media geometrică, H media armonică a celor n numere, definite prin;*

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\ G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n},\ H = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Să se arate că au loc inegalităţile: $H \leq G \leq A$.

R: Din definiţia mediei geometrice avem:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}{G^n} = 1 \text{ sau } \frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{G} = 1.$$

Luând în exerciţiul precedent $a_k = \dfrac{x_k}{G}$, $k = \overline{1,n}$, obţinem: $\dfrac{x_1}{G} + \dfrac{x_2}{G} + \cdots + \dfrac{x_n}{G} \geq n$, sau $A \geq G$. Inlocuind aici pe x$_k$ prin $\dfrac{1}{x_k}$, $k = \overline{1,n}$, găsim $H \leq G$.

1.37 Inegalitatea lui Schwarz-Cauchy. *Pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ are loc inegalitatea:*

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right),$$

sau

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

R: Fie trinomul de gradul al doilea:

$$f(x) = \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right) x^2 - 2\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right) x + \left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right),$$

care se mai scrie:

$$f(x) = (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \cdots + (a_n x - b_n)^2 \geq 0$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci $\Delta \leq 0$, ceea ce implică inegalitatea dată.

1.38 Inegalitatea lui Minkowski. *Pentru orice numere reale a_k, b_k, $k = \overline{1,n}$ are loc inegalitatea:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

R: Tinând seama de inegalitatea lui Schwarz-Cauchy, avem:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

sau

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}\right)^2,$$

de unde, extrăgând radicalul rezultă inegalitatea dată.

1.39 Inegalitatea lui Bernoulli. *Oricare ar fi* $a \in [-1, \infty)$ *şi* $\alpha \in [1, \infty)$ *avem:* $(1+a)^{\alpha} \geq 1 + \alpha a$.

R: Inegalitatea rezultă din studiul monotoniei funcţiei $f : [-1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (1+x)^{\alpha} - \alpha x - 1$, observând că aceasta are un minim egal cu 0 în $x = 0$.

1.40 *Dacă* $a \in [-1, \infty)$ *şi* $n \in \mathbf{N}^*$ *atunci:* $(1+a)^n \geq 1 + na$.

R: Se ia în inegalitatea lui Bernoulli $\alpha = n$.

1.41 *Dacă* $b > 0$, $b \neq 1$, *atunci:* $\left(\dfrac{1+nb}{n+1}\right)^{n+1} > b^n$.

R: Aplicând inegalitatea lui Bernoulli, avem:

$$\left(\frac{1+nb}{n+1}\right)^{n+1} = \left(b + \frac{1-b}{n+1}\right)^{n+1} = b^{n+1}\left[1 + \frac{1-b}{b(n+1)}\right]^{n+1} > b^{n+1}\left(1 + \frac{1-b}{b}\right) = b_n.$$

1.42 *Să se arate că:*

$$1)\ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.\ \ 2)\ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

R: Se ia în inegalitatea precedentă $b = 1 + \dfrac{1}{n}$, respectiv $b = 1 + \dfrac{1}{n}$.

1.43 *Să se arate că oricare ar fi numerele reale* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq -1$, *de acelaşi semn, are loc inegalitatea (generalizare a inegalităţii lui Bernoulli):*

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

R: Se foloseşte inducţia matematică.

1.44 Inegalitatea lui Cebîşev. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *şi* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *numere reale cu* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ *şi* $S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots a_n b_{i_n}$, $n \geq 2$, *unde* $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Să se arate că:*

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots a_n b_1 \leq S \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

R: Fie $j < k$, $i_j < i_k$ atunci $(a_j - a_k)(b_{i_j} - b_{i_k}) \geq 0$ implică: $a_j b_{i_j} + a_k b_{i_k} \geq a_j b_{i_k} + a_k b_{i_j}$. Deci orice inversiune în mulţimea $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ micşorează suma S, ca atare ea este maximă pentru permutarea identică $\{1, 2, \ldots, n\}$ şi minimă pentru permutarea $\{n, n-1, \ldots, 1\}$.

1.45 *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *şi* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *numere reale cu* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$. *Să se arate că:*

$$n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

R: Din exerciţiul precedent rezultă că $\max S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$. Avem deci inegalităţile:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,\\
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Prin adunare membru cu membru obţinem inegalitatea din enunţ.

1.46 *Fie $a, b, c > 0$. Să se arate că:*

1) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$. 2) $a+b+c \leq \dfrac{a^2+b^2}{2c} + \dfrac{b^2+c^2}{2a} + \dfrac{c^2+a^2}{2b} \leq \dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ca} + \dfrac{c^3}{ab}$.

R: Se aplică inegalitatea lui Cebîşev:

1) pentru tripletele (a, b, c) şi $\left(\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}\right)$,

2) pentru tripletele: (a^2, b^2, c^2) şi $\left(\dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a}\right)$, respectiv (a^3, b^3, c^3) şi $\left(\dfrac{a}{abc}, \dfrac{b}{abc}, \dfrac{c}{abc}\right)$.

1.47 Inegalitatea lui Hölder. *Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$, $p > 1$, $q > 1$ şi $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, atunci:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

R: Dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p = 0$ sau $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q = 0$ inegalitatea este evidentă. Fie:

$$A = \frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}, \quad B = \frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}$$

şi funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, definită prin: $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, $\alpha \in (0, 1)$. Deoarece f are în $x = 1$ un maxim egal cu $1 - \alpha$, rezultă că: $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$, $\forall x \in [0, \infty)$. Luăm $x = \dfrac{A}{B}$ şi $\alpha = \dfrac{1}{p}$, deci $1 - \alpha = \dfrac{1}{q}$, deducem: $A^{\frac{1}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q}} \leq \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{q}$. Inlocuind aici A şi B, sumând apoi după i de la 1 la n, obţinem inegalitatea din enunţ.

1.48 *Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ are loc inegalitatea:*

$$1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \cdots \cdot \sqrt[N]{n!} \leq \frac{(n+1)!}{2^n}.$$

R: Se foloseşte majorarea: $\sqrt[k]{k!} = \sqrt[k]{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k} \leq \dfrac{1 + 2 + \cdots + k}{k} = \dfrac{k+1}{k}$.

1.49 *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$, *atunci:*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

R: Se foloseşte inegalitatea lui Schwarz-Cauchy cu $a_i = \sqrt{x_i}$, $b_i = \dfrac{1}{\sqrt{x_i}}$, $i = \overline{1,n}$.

1.50 *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$, *atunci:*

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \geq 3^n.$$

R: Se foloseşte inegalitatea: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, pentru orice $x \in \mathbf{R}_+^*$.

1.51 *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$, $n \geq 2$ *şi* $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *atunci:*

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

R: Notăm $b_i = \dfrac{1}{S - a_i}$, $i = \overline{1,n}$. Deoarece $S > a_i$ rezultă că $b_i > 0$. putem scrie:

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}\right) \geq n^2,$$

sau

$$\frac{n^2}{n-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n\left(\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S - a_n}\right).$$

1.52 *Dacă* $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, *atunci:*

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

R: Se ţine seama că $\dfrac{ab}{a+b} \leq \dfrac{a+b}{4}$ etc.

1.53 *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$, $n \geq 2$, *atunci:*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

R: Se foloseţe inegalitatea mediilor.

1.54 *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$, *atunci:*

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

R: Se înmulţesc membru cu membru inegalităţile: $1 + a_i \geq 2\sqrt{a_i}$, $i = \overline{1,n}$.

1.55 *Dacă* $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, *atunci:* $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

R: Se înmulţesc membru cu membru inegalităţile: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ etc.

1.56 *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$, *atunci:*

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\cdots(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\,\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

R: Se foloseşte inegalitatea mediilor pentru numerele: $\dfrac{a_i}{a_i + b_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi respectiv: $\dfrac{b_i}{a_i + b_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi se adună inegalităţile obţinute.

1.57 *Dacă* $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, *atunci:*

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

R: Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a \geq b \geq c$. Din $a^{a-b} \geq b^{a-b}$, $b^{b-c} \geq c^{b-c}$, $a^{a-c} \geq c^{a-c}$ prin înmulţire membru cu membru se obţine inegalitatea din enunţ.

Capitolul 2

Şiruri şi serii

2.1 Şiruri de numere reale

2.1 *Folosind teorema de caracterizare cu ε a limitei unui şir, să se arate că:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n+(-4)^n}{5^n}=0.\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n+1}=+\infty.$$

R: 1) Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Este suficient să arătăm că există un rang $N=N(\varepsilon)$ a.î.

$$\left|\frac{3\cdot 4^n+(-4)^n}{5^n}-0\right|<\varepsilon,\ \forall n>N.$$

Dar $\left|\dfrac{3\cdot 4^n+(-4)^n}{5^n}\right|\leq\dfrac{4\cdot 4^n}{5^n}<\varepsilon$ pentru $n>\dfrac{\ln\frac{\varepsilon}{4}}{\ln\frac{4}{5}}$. Aşadar, putem lua

$$N(\varepsilon)=\begin{cases}0, & \varepsilon>4,\\ \left[\dfrac{\ln\frac{\varepsilon}{4}}{\ln\frac{4}{5}}\right], & \varepsilon\leq 4.\end{cases}$$

2) Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Este suficient să arătăm că există un rang $N=N(\varepsilon)$ a.î. $\dfrac{n^2+2}{n+1}>\varepsilon$, $\forall n>N$. Însă $\dfrac{n^2+2}{n+1}=n-1+\dfrac{3}{n+1}>n-1>\varepsilon$, pentru $n>1+\varepsilon$. Putem lua $N(\varepsilon)=[1+\varepsilon]$.

2.2 *Folosind teorema de caracterizare cu ε a limitei unui şir, să se arate că:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}.\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{5n-1}=\frac{4}{5}.\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}.$$

2.3 *Folosind criteriul lui Cauchy, să se arate că şirurile* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *sunt convergente, unde:*

$$1)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.\ \ 2)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{2^k},\ x \in \mathbf{R}.$$

$$3)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{a^k}.\ |\alpha_k| < 1,\ k \in \mathbf{N}^*,\ a > 1.$$

R: 1) Arătăm că $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon)$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$ şi $p \in \mathbf{N}^*$. Deoarece

$$\frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k)(n+k-1)} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k},$$

avem:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

pentru $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Putem lua $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

2) Arătăm că $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon)$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, $\forall n > N(\varepsilon)$ şi $p \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right),$$

deci $|x_{n+p} - x_n| < \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ pentru $n > \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$. Putem lua $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$.

3) Avem

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\alpha_{n+1}}{a^{n+1}} + \cdots + \frac{\alpha_{n+p}}{a^{n+p}}\right| \leq \frac{|\alpha_{n+1}|}{a^{n+1}} + \cdots + \frac{|\alpha_{n+p}|}{a^{n+p}} < \frac{1}{a^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{a^{n+p}},$$

deci $|x_{n+p} - x_n| < \dfrac{1}{a^n(a-1)} \cdot \left[1 - \left(\dfrac{1}{a}\right)^p\right] < \dfrac{1}{a^n(a-1)} < \varepsilon$ pentru $n > \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon(a-1)}}{\ln a}$.
Putem lua $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon(a-1)}}{\ln a}\right]$.

2.4 *Folosind criteriul lui Cauchy, să se arate că şirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este divergent, unde*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

R: Este suficient să arătăm că există un $\varepsilon_0 > 0$ şi un $p \in \mathbf{N}^*$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Se constată însă imediat că pentru $p = n$ avem:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

2.5 *Să se cerceteze natura următoarelor şiruri* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu termenii generali:*

$$1)\ x_n = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \cdots \frac{n+10}{2n+1}.\ \ 2)\ x_n = \sin n.$$

R: 1) Şirul este divergent. Se observă că:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{n+11}{2n+3} + \cdots + \frac{2n+10}{4n+1} > \frac{2n+10}{4n+1} > \frac{1}{2}.$$

2) Presupunem că există $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Atunci avem şi $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$, $\lim_{n\to\infty} x_{n-1} = x$, ceea ce implică:

$$\lim_{n\to\infty} [\sin(n+1) - \sin(n-1)] = 0,$$

adică $\lim_{n\to\infty} 2\sin 1 \cos n = 0$ sau $\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$. Din $\sin 2n = 2\sin n \cos n$ ar rezulta că $\lim_{n\to\infty} \sin 2n = 0$. Dar şirul $(\sin 2n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un subşir al şirului $(\sin n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de unde se deduce că $\lim_{n\to\infty} \sin n = 0$. Aşadar am avea: $\lim_{n\to\infty} \left(\sin^2 n + \cos^2 n\right) = 0$. Contradicţie. Deci şirul (x_n) este divergent.

2.6 *Folosind criteriul lui Cauchy, să se studieze natura şirurilor cu termenii generali:*

$$1)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k\,(k+1)}.\ \ 2)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{a^k},\ a > 1.\ \ 3)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{3^k}.$$

2.7 *Să se calculeze limita şirului cu termenul general:*

$$x_n = \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \cdots + \alpha_k}{\beta_0 n^h + \beta_1 n^{h-1} + \cdots + \beta_h},\ \ \alpha_0, \beta_0 \neq 0,\ k, h \in \mathbf{N}.$$

2.8 *Să se calculeze limitele şirurilor:*

$$1)\ x_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}.\ \ 2)\ x_n = \frac{C_n^k}{n^k}.\ \ 3)\ x_n = \frac{n}{2^n}.$$

2.9 *Să se arate că dacă* $|a| < 1$, *atunci* $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$.

R: Deoarece $|a| < 1$, există $b > 0$ a.î. $|a| = \dfrac{1}{1+b}$ şi se dezvoltă după binomul lui Newton.

2.10 *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *numere reale pozitive. Să se arate că:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots x_p^n} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}.$$

R: Fie $x = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Rezultă: $x^n \le x_1^n + x_2^n + \cdots x_p^n \le px^n$, adică;

$$x \le \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots x_p^n} \le x\,\sqrt[n]{p}.$$

Dar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

2.11 *Fie şirul cu termenul general:*

$$x_n = a + n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k}.$$

1) *Să se arate că* (x_n) *este convergent.*
2) *Să se găsească rangul de la care* $|x_n - a| \leq 0,01$.

2.12 *Să se calculeze limitele şirurilor* (x_n) *date prin termenii generali:*

$$1)\ x_n = \frac{\sqrt{5n^2 - 3n} + 2}{4n + 1}.\ \ 2)\ x_n = \left(\frac{3n+2}{3n+5}\right)^n.\ \ 3)\ x_n = \frac{2a^n + b^n}{3a^n + 4b^n}.$$

$$4)\ x_n = \frac{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}.\ \ 5)\ x_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}.$$

$$6)\ x_n = \sqrt{n + 2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n + 4\sqrt{n+1}}.\ \ 7)\ x_n = \sqrt[3]{n^2 + n + 1} - an.$$

$$8)\ x_n = \left(\frac{2n^2 + 5n + 4}{3n^2 + 2}\right)^{\dfrac{-6n}{3n+1}}.\ \ 9)\ x_n = \left(\frac{n + \sqrt{n} + 1}{n + \sqrt[3]{n} + 2}\right)^n.\ \ 10)\ x_n = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^3 - 1}{\left(3 + \dfrac{1}{n}\right)^2 - 9}.$$

$$11)\ x_n = \frac{n\left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right)}{(n+2)^5}.\ \ 12)\ x_n = \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt{n^4 - n^2 + 1}.$$

$$13)\ x_n = n^k \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+5}} - 1\right).\ \ 14)\ x_n = n^{\dfrac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right).$$

2.13 *Se consideră curba formată din semicercuri de raze* $r, \dfrac{r}{3}, \dfrac{r}{9}, \dfrac{r}{27}, \ldots$ *cu centrele cercurilor coliniare. Să se calculeze lungimea* L_n *a liniei formate din primele* n *semicercuri, precum şi* $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$. *care sunt valorile lui* n *pentru care diferenţa* $L - L_n$ *reprezintă cel mult* 5% *din* L*?*

R: Avem:

$$L_n = \pi\left(r + \frac{r}{3} + \frac{r}{3^2} + \cdots + \frac{r}{3^{n-1}}\right) = \frac{3\pi r}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

şi $L = \dfrac{3\pi r}{2}$. $L - L_n = \dfrac{3\pi r}{2} \cdot \dfrac{1}{3^n} \leq \dfrac{5}{100} \cdot \dfrac{3\pi r}{2}$, de unde $3^n \geq 20$, adică $n \geq 3$.

2.14 *Să se discute după valorile parametrului real* p*:*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n^p \left[\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}}\right].$$

R: Notăm

$$a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}} = \left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1\right) + \left(1 - \sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}}\right).$$

Avem $a_n \to 0$, iar $na_n \to -\frac{1}{6}$. Deci:

$$\ell = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{p-1} = \begin{cases} 0, & p \in (-\infty, 1), \\ -\frac{1}{6}, & p = 1, \\ -\infty, & p \in (1, \infty). \end{cases}$$

2.15 *Să se calculeze limita şirului* (x_n) *cu termenul general:*

$$x_n = \frac{\sin 1 + a \sin 2 + \cdots + a^{n-1} \sin n}{a^n \left[1 + 2a + 3a^2 + \cdots + (n+1)a^n\right]}, \quad a > 1.$$

R: Din $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deducem:

$$0 < |x_n| \leq \frac{(1-a)(1-a^n)}{a^n \left[1 - (n+2)a^{n+1} + (n+1)a^{n+2}\right]} = \alpha_n$$

şi cum pentru $a > 1$, $\alpha_n \to 0$, rezultă că $x_n \to 0$.

2.16 *Să se arate că şirul cu termenul general* $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ *este convergent. Limita sa este numărul e.*

R: Folosim criteriul lui Cauchy:

$$\begin{aligned} x_{n+p} - x_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}\right] \end{aligned}$$

de unde:

$$x_{n+p} - x_n < \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^p}\right] < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

pentru $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

2.17 *Să se arate că dacă* $a_n \to a$, *atunci* $s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to a$.

R: Se aplică teorema lui Stolz-Cesaro.

2.18 *Să se arate că dacă şirul de numere pozitive* $b_n \to b$, *atunci*

$$p_n = \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n} \to b.$$

2.19 *Fie* $(a)_n$ *un şir de numere pozitive. Să se arate că dacă*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\alpha.$$

R: Se ţine seama de egalitatea $\sqrt[N]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}$.

2.20 *Să se calculeze:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.\ \ 2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}}.\ \ 3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

R: Se aplică exerciţiul precedent. Se obţine: 1) 1, 2) $\frac{4}{e}$, 3) $\frac{1}{e}$.

2.21 *Să se arate că:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1},\quad \forall p\in\mathbf{N}.$$

R: Se aplică teorema lui Stolz-Cesaro:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right]+\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right]=p$.

2.22 *Să se determine limita şirului cu termenul general:*

$$x_n=\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}},\quad p\in\mathbf{N}^*.$$

2.23 *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2!}+\sqrt[3]{3!}+\cdots+\sqrt[n]{n!}}{n^2\cdot a^n},\quad a>1.$$

R: Se aplică teorema lui Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{a^n\left[(n+1)^2a-n^2\right]}=\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^2\cdot a^n}=0.$$

2.24 *Să se calculeze:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+(2!)^2\cdot\sqrt{2}+(3!)^2\cdot\sqrt[3]{3}+\cdots+(n!)^2\cdot\sqrt[n]{n}}{n!\cdot(n+1)!\cdot\sqrt{n}}.$$

R: Se aplică teorema lui Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot \sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)(n+2)\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 0.$$

2.25 *Se dă şirul* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *cu termenul general:*

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+4)}.$$

1) *Să se arate că şirul este mărginit şi să se calculeze* $\sup_{n\in\mathbf{N}} x_n$.

2) *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{18}{11}\cdot x_n\right]^n$.

R: 1) Din identitatea

$$\frac{1}{(k+1)(k+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4}\right),\quad k\in\mathbf{N},$$

deducem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right) = \frac{11}{18}.$$

Din $x_{n+1}-x_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+5)} > 0$ rezultă că şirul este crescător şi deci $\sup_{n\in\mathbf{N}} x_n = \dfrac{11}{18}$.

2) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{18}{11}\cdot x_n\right]^n = e^{-1}$.

2.26 *Să se determine limita următoarelor şiruri:*

$$1)\ x_n = \frac{3}{1^3} + \frac{5}{1^3+2^3} + \cdots + \frac{2n+1}{1^3+2^3+\cdots+n^3}.\quad 2)\ x_n = \frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}},\ \alpha,\beta>0.$$

$$3)\ x_n = \frac{a^n+b^n+3^n}{2^n+5^n+n},\ a,b\geq 0.\quad 4)\ x_n = \frac{1}{7^n\cdot n!}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(k^2+3k+9\right).$$

R: La 4) se ţine seama de inegalitatea $k^2+3k+9 \geq 3\sqrt[3]{27k^3} = 9k$.

2.27 *Să se calculeze:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 8^n}}.\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k+1)!}.\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!}.$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{3n}\cdot(n!)^3}{(3n)!}}.\quad 5)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.\quad 6)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right].$$

R: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{16(2n+1)} = \dfrac{1}{32}$. 2) Din $\dfrac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$ deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left[2 - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] = 2.$$

3) Din $\dfrac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!} = \dfrac{2^{k-1}}{k!} - \dfrac{2^k}{(k+1)!}$ deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{2^n}{(n+1)!}\right] = 1.$$

2.28 *Să se calculeze limitele şirurilor cu termenii generali*

$$1)\ x_n = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}.\ \ 2)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{n^3+k}.\ \ 3)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+1)!}.$$

$$4)\ x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \cdot \frac{3\cdot 2^n + (-1)^n}{2^n}.\ \ 5)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

$$6)\ x_n = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sqrt{C_n^2} + \sqrt{C_{n+1}^2} + \cdots + C_{2n}^2\right).\ \ 7)\ x_n = \frac{1}{n^3} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2\right).$$

2.29 *Să se calculeze limitele şirurilor cu termenii generali:*

$$1)\ x_n = \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}.\ \ 2)\ x_n = \left(1 + \frac{\sqrt[3]{n}+1}{2\sqrt{n}-3}\right)^{\alpha\sqrt[6]{n}-3},\quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

$$3)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)! + k!}.\ \ 4)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,(k+1)\,(k+2)}{n^4}.$$

2.30 *Să se calculeze limita şirului cu termenul general*

$$x_n = ac + (a+ab)c^2 + (a+ab+ab^2)c^3 + \cdots + (a+ab+\cdots+ab^n)c^{n+1},$$

$a, b, c \in \mathbf{R},\ |c| < 1,\ b \neq 1,\ |bc| < 1.$

R: Să observăm că se mai scrie

$$x_n = \frac{ac}{1-b}\left[(1+c+\cdots+c^n) - b\,(1+bc+\cdots+b^n c^n)\right].$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n \left[\frac{1-c^{n+1}}{1-c} - b\cdot\frac{1-(bc)^{n+1}}{1-bc}\right] = \frac{ac}{(1-c)(1-bc)}.$$

2.31 *Să se arate că:*

$$0 < \ln\left[\ln(k+1)\right] - \ln(\ln k) < \frac{1}{k\ln k},\quad \forall k \geq 2$$

şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln k}$.

R: Inegalitatea din stânga rezultă din faptul că funcţia $\ln x$ este strict crescătoare. Fie $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \ln(\ln x)$. Pe fiecare interval $[k, k+1]$, $k \geq 2$, conform teoremei lui Lagrange, există $c_k \in (k, k+1)$ a.î.

$$\ln[\ln(k+1)] - \ln(\ln k) = \frac{1}{c_k \ln c_k}.$$

Din $\ln k < \ln c_k < \ln(k+1)$ deducem:

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \frac{1}{c_k \ln c_k} < \frac{1}{k \ln k},$$

deci

$$0 < \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln[\ln(k+1)] - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k}.$$

Sumând pentru $k = \overline{2, n}$ rezultă că limita este ∞.

2.32 *Să se calculeze limita şirului cu termenul general*

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{(n^2+1)(n^2+2^2)\cdots(2n^2)}{n^2}}.$$

R: Avem că $\ln x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{k^2}{n^2}\right)$, care este o sumă Riemann pentru funcţia $f(x) = \ln(1 + x^2)$ pe intervalul $[0, 1]$, pentru diviziunea $\Delta_n = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$, cu punctele intermediare $\xi_k = \dfrac{k}{n}$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

2.33 *Să se calculeze limita şirului cu termenul general*

$$x_n = \left[\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n dx\right]^{\frac{1}{n}}, \quad a < b.$$

R: Notăm $I_{m,n} = \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$. Integrând prin părţi, obţinem

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1} \cdot I_{m-1,n+1} = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n+m+1} \cdot I_{0,n+m}.$$

Se obţine de aici că $I_{n,n} = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$.

2.34 *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \dfrac{k}{n^2}} - 1\right]$.

R: Deoarece $\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1=\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{k}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}+1}$. Din

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{k}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\leq\frac{1}{n^2}\cdot\frac{k}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}+1}\leq\frac{1}{n^2}\cdot\frac{k}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1},$$

sumând pentru $k=\overline{1,n}$, rezultă

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\leq\left[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right]\leq\frac{n(n+1)}{2n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1},$$

deci şirul are limita $\dfrac{1}{2}$.

2.35 *Fiind dată funcţia* $f:\mathbf{R}\setminus\{-2,-1\}\to\mathbf{R}$, *definită prin* $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, *să se calculeze limita şirului cu termenul general*

$$x_n=f^{(k)}(1)+f^{(k)}(2)+\cdots+f^{(k)}(n),$$

unde $f^{(k)}$ *este derivata de ordinul* k *a funcţiei* f.

R: Deoarece $f(x)$ se poate scrie: $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$, rezultă că

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k\cdot k!\cdot\left[\frac{1}{(x+1)^{k+1}}-\frac{1}{(x+2)^{k+1}}\right],$$

şi deci

$$x_n=\left[-\frac{1}{(n+2)^{k+1}}\right]\to(-1)^k\cdot k!\cdot\frac{1}{2^{k+1}}.$$

2.36 *Să se studieze natura şirului* (x_n) *definit prin:* $x_1=a\in[1,2]$ *şi* $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$, *pentru* $n\geq 1$.

2.37 *Se dau numerele reale* a_0,b_0,c_0. *Definim şirurile* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *prin:*

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+c_n\right),\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(c_n+a_n\right),\quad c_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+b_n\right).$$

Să se arate că şirurile sunt convergente la $\dfrac{1}{3}\left(a_0+b_0+c_0\right)$.

R: Fie $x_n=a_n+b_n+c_n$. Adunând cele trei relaţii, obţinem: $x_{n+1}=x_n$, deci (x_n) este un şir constant: $x_n=x_0$. Din $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_{n-1}+x_0)$ rezultă că $a_n\to\dfrac{1}{3}x_0$ etc.

2.38 *Fie* $q = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *si sirul* (x_n) *definit prin:* $x_1 = q$, $x_2 = 1+q$, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

1) *Să se arate că termenii şirului sunt în progresie geometrică.*

2) *Să se arate că are loc egalitatea*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_{n+2} & x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n+2} & x_{n+1} \\ x_{n+1} & x_n & x_{n+2} \end{vmatrix} = 4 \cdot x_{3n+2}.$$

3) *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

R: 1) Prin inducţie matematică: $x_2 = 1+q = q^2$, $x_3 = x_1 + x_2 = q^3$. Presupunem $x_n = q^n$. Din $x_{n+2} = x_n + x_{n+1} = q^n + q^{n+1} = q^n(1+q)$, rezultă $x_{n+2} = q^{n+2}$.
2) $\Delta_n = q^{3n}(q^6 - 2q^3 + 1) = 4q^{3n+2} = 4x_{3n+2}$. 3) Deoarece $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.39 *Să se calculeze limita şirului:*

$$x_1 = \sqrt{a},\ x_{n+1} = \sqrt{a + x_n},\ \ a > 0.$$

2.40 *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n - 4 - 2a_n}{\pi} \right)^n,\ \ a_n = \int_1^n \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx,\ \ n \geq 2.$$

R: Se obţine: $a_n = 2n - 2 - 2\,\mathrm{arctg}\, n + \dfrac{\pi}{2}$, iar limita este $e^{-\frac{4}{\pi}}$.

2.41 *Fie* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *şi* $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *două şiruri de numere raţionale a.î.:*

$$\left(a + b\sqrt{k}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{k},\ n \geq 1,\ a, b \in \mathbf{Q}_+,\ \sqrt{k} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n}$.

R: Din $A_n + B_n\sqrt{k} = \left(a + b\sqrt{k}\right)^n$ şi $A_n - B_n\sqrt{k} = \left(a - b\sqrt{k}\right)^n$, urmează:

$$A_n = \frac{1}{2}\left[\left(a + b\sqrt{k}\right)^n + \left(a - b\sqrt{k}\right)^n\right],\ B_n = \frac{1}{2\sqrt{k}}\left[\left(a + b\sqrt{k}\right)^n - \left(a - b\sqrt{k}\right)^n\right].$$

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = \sqrt{k}$.

2.42 *Fie matricea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ *şi*

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_n & b_n \end{bmatrix},\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

R: Se găseşte: $a_n = 3\left(2^n - 1\right)$ şi $b_n = 2^n$.

2.43 *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

R: Deoarece $\sin\alpha = \sin(\alpha - n\pi)$, urmează:

$$\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n+1} - n\pi\right) = \sin^2\left(\pi\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\right)$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) = \sin^2\dfrac{\pi}{2} = 1$.

2.44 *Să se calculeze limita şirului*

$$x_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!},\quad n \geq 2.$$

R: Fie $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$. Deoarece $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to e$, rezultă că $\sqrt[n]{a_n} = e$. Fie

$$b_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\dfrac{1}{n+1}}$$

şi $b_n^n = \left(\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\dfrac{n}{n+1}} \to e$ şi

$$e = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{x_n}}\right]^{x_n\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}} = e^{e\lim\limits_{n\to\infty} x_n},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{e}$.

2.45 *Să se determine mulţimea punctelor limită, limita inferioară şi limita superioară pentru şirurile date prin:*

$$1)\ x_n = \frac{1+(-1)^n}{3} + (-1)^n\cdot\frac{2n}{3n+1}.\quad 2)\ x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left[(-1)^n + \frac{1}{2}\right] + \cos\frac{n\pi}{2}.$$

R: 1) Deoarece $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{x_{2k}\}_{k\in\mathbf{N}} \cup \{x_{2k+1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ şi

$$x_{2k} = \frac{2}{3} + \frac{4k}{6k+1} \to \frac{4}{3},\ x_{2k+1} = -\frac{4k+2}{6k+4} \to -\frac{2}{3},$$

rezultă că $\mathcal{M} = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right\}$, $\liminf x_n = -\dfrac{2}{3}$, $\limsup x_n = \dfrac{4}{3}$.

2) Deoarece $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{x_{4k}\}_{k\in\mathbf{N}} \cup \{x_{4k+1}\}_{k\in\mathbf{N}} \cup \{x_{4k+2}\}_{k\in\mathbf{N}} \cup \{x_{4k+3}\}_{k\in\mathbf{N}}$ şi

$$\begin{aligned}
x_{4k} &= \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k} + \cos 2k\pi \to \frac{3}{2}e+1,\\
x_{4k+1} &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)^{4k+1} + \cos\frac{(4k+1)\pi}{2} \to -\frac{1}{2}e,\\
x_{4k+2} &= \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{4k+2}\right)^{4k+2} + \cos\frac{(4k+2)\pi}{2} \to \frac{3}{2}e-1,\\
x_{4k+3} &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4k+3}\right)^{4k+3} + \cos\frac{(4k+3)\pi}{2} \to -\frac{1}{2}e,
\end{aligned}$$

rezultă că $\mathcal{M} = \left\{-\frac{1}{2}e, \frac{3}{2}e-1, \frac{3}{2}e+1\right\}$, $\liminf x_n = -\frac{1}{2}e$, $\limsup x_n = \frac{3}{2}e+1$.

2.46 *Să se determine mulţimea punctelor limită, limita inferioară şi limita superioară pentru şirurile date prin:*

$$1)\ x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot(-1)^n} \cdot \frac{n}{2n+1} + \cos\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbf{N}^*.$$

$$2)\ x_n = 5 - 3\,(-1)^{\frac{n\,(n+1)}{2}} + \sin\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbf{N}.$$

$$3)\ x_n = \frac{1}{n}\cdot n^{(-1)^n} + \sin\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbf{N}^*.$$

$$4)\ x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1},\quad n\in\mathbf{N}.$$

$$5)\ x_n = (-1)^{\frac{n\,(n+1)}{2}} - \cos\frac{n\pi}{3},\quad n\in\mathbf{N}.$$

2.2 Principiul contracţiei

2.47 *Să se arate că ecuaţia* $x^3+4x-1=0$ *are o singură rădăcină reală şi să se determine aproximaţiile până la ordinul trei ale rădăcinii.*

R: Se constată imediat că ecuaţia are o rădăcină pe intervalul $[0,1]$. Scriind ecuaţia sub forma echivalentă $x = \frac{1}{x^2+4}$, problema revine la a arăta că aplicaţia $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2+4}$, este o contracţie pe $[0,1]$. Dar

$$d(\varphi(x),\varphi(y)) = |\varphi(x)-\varphi(y)| = \frac{|x+y|}{(x^2+4)\,(y^2+4)}\cdot d(x,y) \leq \frac{1}{8}\,d(x,y).$$

Intr-adevăr, din $|x| \leq \dfrac{x^2+4}{4}$, deducem $|x+y| \leq |x|+|y| \leq \dfrac{1}{4}\left(x^2+4\right)\left(y^2+4\right)$. Deci φ este o contracţie pe $[0,1]$, cu $q=\dfrac{1}{8}$. Şirul aproximaţiilor succesive:

$$x_0=0,\ x_{n+1}=\frac{1}{x_n^2+4},\ \ n=0,1,2,\ldots$$

ne dă $x_1=0,25$, $x_2=0,2461538$, $x_3=0,2462695$ etc.

2.48 *Să se arate că ecuaţia* $x^3+12x-1=0$ *are o singură rădăcină reală şi să se calculeze această rădăcină cu o eroare mai mică de* $0,0001$.

R: Se constată imediat că ecuaţia are o rădăcină pe intervalul $[0,1]$. Ca în exerciţiul precedent, se arată că aplicaţia $\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2+12}$, este o contracţie pe $[0,1]$, cu $q=\dfrac{2}{169}$. Şirul aproximaţiilor succesive este:

$$x_0=0,\ x_{n+1}=\frac{1}{x_n^2+12},\ \ n=0,1,2,\ldots$$

Estimarea erorii metodei este dată de

$$|x_n-\xi|<\frac{\delta}{1-q}\,q^n,\ \ \forall n\in\mathbf{N},$$

în care $\delta=|x_1-x_0|$. In cazul nostru

$$|x_n-\xi|<\frac{1}{12}\frac{169}{167}\left(\frac{2}{169}\right)^n<10^{-4}.$$

Se constată că este suficient să luăm $n=2$. Avem: $x_0=0$, $x_1=\dfrac{1}{12}=0,08\,3333$, $x_2=\dfrac{144}{1729}=0,083285135$.

2.49 *Să se arate că ecuaţia* $\sin x-10x+1=0$ *are o singură rădăcină reală şi să se calculeze această rădăcină cu o eroare mai mică de* $0,001$.

R: Se constată imediat că ecuaţia are o rădăcină pe intervalul $[0,1]$. Se constată că aplicaţia $\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{10}(1+\sin x)$, este o contracţie pe $[0,1]$, cu $q=\dfrac{1}{10}$. Şirul aproximaţiilor succesive este:

$$x_0=0,\ x_{n+1}=\frac{1}{10}\left(1+\sin x_n\right),\ \ n=0,1,2,\ldots$$

Estimarea erorii

$$|x_n-\xi|<\frac{1}{10}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n<10^{-3}.$$

Este suficient să luăm $n=2$. Avem: $x_0=0$, $x_1=\dfrac{1}{10}=0,1$, $x_2=\dfrac{1}{10}(1+\sin 0,1)=0,\ 10998$.

2.50 *Să se arate că ecuaţia* $x^5 + x^3 - 1,16 = 0$ *are o singură rădăcină reală şi să se calculeze această rădăcină cu o eroare mai mică de* $0,001$.

2.51 *Fie* $f : [a,b] \to [-c,c]$ *o funcţie derivabilă pe* $[a,b]$ *şi a.î.* $0 < m \leq f'(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. *Ce condiţie trebuie să îndeplinească numărul* $p \in (m,M)$ *pentru ca funcţia* $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{p} f(x)$, $x \in [a,b]$, *să fie o contracţie pe* $[a,b]$ *şi deci ecuaţia* $\varphi(x) = 0$ *să aibă o singură soluţie pe* $[a,b]$*?*

R: Avem: $d(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| = |\varphi'(\xi)| \cdot d(x,y)$ şi pentru ca φ să fie contracţie este necesar să existe $q < 1$ a.î. $|\varphi'(\xi)| < q$. Insă $\varphi'(\xi) = 1 - \dfrac{1}{p} f'(x)$ şi din $0 < m \leq f'(x) \leq M$ rezultă $1 - \dfrac{M}{p} \leq \varphi'(\xi) \leq 1 - \dfrac{m}{p} < 1$ (căci $p \in (m,M)$). Este deci necesar ca $-1 < 1 - \dfrac{M}{p}$, adică $p > \dfrac{M}{2}$. In concluzie, dacă $p \in (\max\left\{m, \dfrac{M}{2}\right\}, M)$, φ este o contracţie pe $[a,b]$.

Putem generaliza exerciţiul precedent, presupunând $p = p(x)$. Astfel, dacă alegem

$$p(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, \quad x \in [a,b],$$

se obţine *medoda coardei*, iar dacă alegem $p(x) = f'(x)$ se ajunge la *metoda lui Newton*.

2.52 *Ce condiţie trebuie să îndeplinească funcţia* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, *de două ori derivabilă pe* $[a,b]$ *pentru ca funcţia* $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ *să fie o contracţie pe* $[a,b]$*?*

R: Deoarece $d(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot d(x,y)$, condiţia $|\varphi'(\xi)| \leq q < 1$ conduce la: $|f(x) \cdot f''(x)| \leq q \cdot f'^2(x)$, $0 < q < 1$.

2.53 *Să se calculeze aproximativ* $\sqrt[p]{a}$, $a > 0$ *şi* $p = 2, 3, \ldots$

R: Luăm $f(x) = x^p - a$. Atunci $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{1}{p}\left[(p-1)\,x + a x^{1-p}\right]$. Cum $\varphi'(x) = \dfrac{p-1}{p}\left(1 - a x^{-p}\right) < \dfrac{p-1}{p}$, pentru $x > 0$, rezultă că φ este o contracţie şi deci putem lua

$$\sqrt[p]{a} \approx x_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)\,x_n + a x_n^{1-p}\right].$$

2.3 Şiruri în $\mathbf{R}^p$

2.54 *Să se calculeze limitele următoarelor şiruri din* $\mathbf{R}^3$*:*

$$1)\ \mathbf{x}_n = \left(\frac{2n}{3n-1}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}, \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\right).$$

$$2)\ \mathbf{x}_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}, \sqrt[n]{n^2}, e^{\frac{1}{n}}\right).$$

2.55 *In $\mathbf{R}^4$ se consideră şirul $(\mathbf{x}_n)$ definit prin relaţia de recurenţă:*

$$6\mathbf{x}_{n+3} = 11\mathbf{x}_{n+2} - 6\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

cu $\mathbf{x}_0 = (0,0,0,0)$, $\mathbf{x}_1 = (1,9,3,6)$, $\mathbf{x}_2 = (1,9,7,8)$. *Să se determine* $\mathbf{x}_n$ *şi să se calculeze limita şirului.*

R: Se caută $\mathbf{x}_n = \lambda^n \mathbf{a}$, cu $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^4$. Se obţine penrtu λ ecuaţia caracteristică $6\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, cu rădăcinile: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Deci $\mathbf{x}_n$ este de forma: $\mathbf{x}_n = \mathbf{a} + \frac{1}{2^n}\,\mathbf{b} + \frac{1}{3^n}\,\mathbf{c}$. Se obţine limita $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, 9\right)$.

2.4 Serii de numere reale

2.56 *Să se arate că seria*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

este convergentă şi $s = 1$.

R: In adevăr,

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

2.57 *Seria*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se numeşte seria armonică, *deoarece pentru $n \geq 2$, a_n este media armonică a termenilor vecini a_{n-1} şi a_{n+1}. Să se arate că seria este divergentă şi are suma $+\infty$.*

R: Şirul (s_n) al sumelor parţiale este strict crescător şi divergent, deoarece

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

ceea ce arată că (s_n) nu este şir fundamental. Deci $\lim s_n = +\infty$.

2.58 *Să se arate că seria*

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

este divergentă.

R: Este o serie oscilantă deoarece şirul (s_n) al sumelor parţiale este şirul oscilant: 1, 0, 1, 0, ...

2.59 *Seria*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \ \ q \in \mathbf{R}$$

se numeşte seria geometrică *deoarece şirul* (a_n), $a_n = q^{n-1}$, *este o progresie geometrică cu raţia* q. *Să se studieze natura acestei serii după valorile lui* q.

R: Şirul sumelor parţiale are termenul general

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{dacă } q \neq 1, \\ n, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{dacă } |q| < 1, \\ +\infty, & \text{dacă } q \geq 1. \end{cases}$$

Pentru $q \leq 1$ şirul (s_n) nu are limită. Astfel, seria geometrică cu raţia q este convergentă pentru $|q| < 1$ şi are suma $\dfrac{1}{1-q}$ şi divergentă pentru $|q| \geq 1$.

2.60 *Să se stabilească natura seriilor următoare şi în caz de convergenţă să se determine sumele lor:*

$$1) \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+\alpha+1} - 2\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\alpha-1}\right), \ \alpha > 0.$$

$$2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \ \alpha \in \mathbf{Z}_-.$$

$$3) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\alpha^n}, \ \alpha > 1. \ \ 4) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{15n^2 - 8n - 3}.$$

$$5) \ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}. \ \ 6) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$7) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)!}. \ \ 8) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{[5 + (-1)^n]^n}.$$

R: 1) Notăm cu $a_n = \sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n+\alpha-1}$. Se observă că $s_n = a_{n+1} - a_n$. Se obţine suma $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha+1}$.

2) Folosind identitatea:

$$\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{\alpha+k+1},$$

se obţine $s_n = \dfrac{1}{\alpha+1} - \dfrac{1}{\alpha+n+1}$. Seria este convergentă şi are suma $\dfrac{1}{\alpha+1}$.

3) Pentru a evalua suma parţială de ordinul n plecăm de la identitatea:

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{x^2}{\alpha^2}+\cdots+\frac{x^n}{\alpha^n}=\frac{1}{\alpha^n}\cdot\frac{x^{n+1}-x\alpha^n}{x-\alpha}.$$

Derivând în raport cu x, avem:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{2x}{\alpha^2}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{\alpha^n}=\frac{nx^{n+1}-\alpha(n+1)x^n+\alpha^{n+1}}{\alpha^n\left(x-\alpha\right)^2}.$$

De aici, pentru $x=1$, obţinem

$$s_n=\frac{n-\alpha(n+1)+\alpha^{n+1}}{\alpha^n\left(1-\alpha\right)^2}.$$

Seria este convergentă şi are suma $\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$.

4) Termenul general al şirului sumelor parţiale se descompune în fracţii simple astfel:

$$\frac{1}{16k^2-8k-3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right).$$

Folosind această identitate se obţine $s_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4n+1}\right)$. Seria este convergentă şi are suma $\dfrac{1}{4}$.

5) Şirul sumelor parţiale al acestei serii

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\ln(n+1)$$

are limita ∞, deci seria este divergentă.

6) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, seria este divergentă.

7) Fie $b_n=\dfrac{2^n}{(n+2)!}$. Atunci termenul general al seriei se scrie $a_n=n\cdot b_n$, iar $(n+2)b_n=2b_{n-1}$. Deci

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}kb_k=2(b_0-b_n)=1-2b_n.$$

Dar $b_n\to 0$ deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+2)!}$ este convergentă. Rezultă că seria este convergentă şi are suma 1.

8) Se observă că:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\left[5+(-1)^n\right]^n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)=\frac{19}{24}.$$

2.61 *Să se arate că următoarele serii sunt convergente şi să se determine sumele lor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}.\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{5^n}.\ \ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$$

R: 1) Serie geometrică cu raţia $\frac{1}{3}$ şi suma $\frac{1}{4}$. 2) Serie geometrică cu suma $\frac{5}{6}$. 3) Serie telescopică cu suma $\frac{1}{2}$.

2.62 *Să se calculeze sumele următoarelor serii, ştiind că termenii şirului* (a_n) *formează o progresie aritmetică cu* $a_1 > 0$ *şi raţia* $r > 0$*:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}.\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}.\ \ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2}.$$

R: 1) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, avem:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Se obţine o serie telescopică.

2) şi 3) Analog, avem:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right),$$

$$\frac{a_n+a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2}\right).$$

2.63 *Să se arate că:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n} = \frac{1}{4}\left(x - \sin x\right).\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2\operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{x}.$$

R: 1) Multiplicăm identitatea $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ cu 3^{n-1} şi luăm $\theta = \frac{x}{3^n}$. Obţinem:

$$3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n} = \frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{x}{3^n} - 3^{n-1}\sin\frac{x}{3^{n-1}}\right).$$

Punem $a_n = \frac{3^{n-1}}{4}\sin\frac{x}{3^{n-1}}$. Atunci $s_n = a_{n+1} - a_1$ şi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}\left(x - \sin x\right).$$

2) Multiplicăm identitatea $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg}\theta - 2\operatorname{ctg}2\theta$ cu 2^n şi luăm $\theta = 2^n x$. Obţinem:

$$2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2^n \operatorname{ctg} 2^n x - 2^{n+1}\operatorname{ctg} 2^{n+1} x.$$

2.64 *Să se calculeze suma seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}.$$

R: Din

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \text{ şi } \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n+1}},$$

rezultă că $a_n = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n+1}$ şi deci $s_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n+1} \to \dfrac{\pi}{4}$.

2.65 *Să se arate că:*

$$\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1.$$

R: Seria

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

este convergentă pentru orice $p \geq 2$, deci

$$\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Dar

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

şi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

2.66 *Să se arate că următoarele serii sunt divergente:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}. \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}. \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}.$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}. \quad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}.$$

2.67 *Să se studieze natura seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(1+a^{n-1}b)(1+a^n b)}, \quad a, b \in \mathbf{R}_+^*.$$

R: Deoarece termenul general al seriei se poate scrie, pentru $a \neq 1$:

$$a_n = \frac{1}{1-a}\frac{a^{n-1}-a^n}{(1+a^{n-1}b)(1+a^nb)} = \frac{1}{b(1-a)}\frac{(1+a^{n-1}b)-(1+a^nb)}{(1+a^{n-1}b)(1+a^nb)},$$

adică

$$a_n = \frac{1}{b(1-a)}\left(\frac{1}{1+a^nb} - \frac{1}{1+a^{n-1}b}\right) \text{ şi } s_n = \frac{1}{b(1-a)}\left(\frac{1}{1+a^nb} - \frac{1}{1+b}\right).$$

Deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(1+a^{n-1}b)(1+a^nb)} = \begin{cases} \dfrac{1}{b(a-1)(b+1)}, & a \in (1,\infty), \\ \infty, & a = 1, \\ \dfrac{1}{(1-a)(1+b)}, & a \in (0,1). \end{cases}$$

2.5 Serii cu termeni pozitivi

2.68 *Fie (a_n) un şir de numere pozitive. Să se arate că seria $\sum a_n$ este convergentă d.d. seria $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ este convergentă.*

R: Deoarece $\dfrac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$, dacă seria $\sum a_n$ este convergentă atunci şi seria $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ este convergentă.

Dacă seria $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ este convergentă, atunci $\dfrac{a_n}{1+a_n} \to 0$, deci $a_n \to 0$. Deci pentru n suficient de mare, $0 \leq a_n \leq 1$. Atunci $\dfrac{1}{2}a_n \leq \dfrac{a_n}{1+a_n}$. Deci seria $\sum a_n$ este convergentă.

2.69 *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, *numită* seria lui Riemann *sau* seria armonică generalizată *este:*

- *convergentă pentru $\alpha > 1$;*
- *divergentă pentru $\alpha \leq 1$.*

R: Intr-adevăr, dacă $\alpha \leq 0$, seria este divergentă deoarece şirul termenilor ei nu cunverge la zero.

Dacă $\alpha > 0$, şrul cu termenul general $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ este descrescător şi deci seria lui Riemann are aceeaşi natură cu seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n,$$

care este o serie geometrică cu raţia $q = 2^{1-\alpha} > 0$, convergentă dacă $q = 2^{1-\alpha} < 1$, adică $\alpha > 1$, şi divergentă dacă $q = 2^{1-\alpha} \geq 1$, adică $\alpha \leq 1$.

2.70 *Să se arate că seria cu termenul general $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$ este convergentă.*

R: Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

2.71 *Să se arate că seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *este convergentă.*

R: Intr-adevăr:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1, \quad n \geq 1.$$

Suma acestei serii este $e = 2,7182818\ldots$

2.72 *Să se arate că seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ *este convergentă şi şa se precizeze numărul de termeni necesar pentru a obţine suma seriei cu o eroare mai mică de* $0,001$.

R: Aplicăm criteriul raportului cu limită

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 0 < 1,$$

deci seria este convergentă. Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+2} \leq \frac{1}{3}$, pentru $n \geq 4$, restul de ordinul n

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq a_n \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2} \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{(n+1)!} < 10^{-3},$$

pentru $n \geq 9$.

2.73 *Să se stabilească natura seriei:*

$$\frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} + \cdots$$

R: Deoarece $\sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$, pentru $n \geq 2$, avem că $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Dar seria $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este divergentă.

2.74 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}.\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n+n},\ a > -1.$$

R: 1) Seria este convergentă. 2) Se aplică criteriul comparaţiei cu limită. Se compară cu seria $\sum \frac{1}{n}$. Deoarece $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, seria este divergentă. 3) Pentru $a > 1$, cum $\frac{1}{a^n+n} < \frac{1}{a^n}$, seria este convergentă. Pentru $a = 1$ seria dată este seria armonică. Pentru $|a| < 1$ se aplică criteriul comparaţiei cu limită. Se compară cu seria armonică. Deoarece $\lim \frac{n}{a^n+n} = 1$, seria este divergentă.

2.75 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+a++a^2\cdots+a^n\right)}.\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}},\quad a>0.$$

R: 1) Pentru $a \geq 1$, $1+a++a^2\cdots+a^n \geq n+1>n$. Rezultă că

$$\frac{1}{n\left(1+a++a^2\cdots+a^n\right)}<\frac{1}{n^2}$$

şi deci seria este convergentă.

Pentru $0<a<1$ se aplică criteriul comparaţiei cu limită. Se compară cu seria armonică. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a++a^2\cdots+a^n}=\lim_{n\to\infty} \frac{1-a}{1-a^{n+1}}=1-a,$$

seria dată este divergentă.

2) Deoarece $\sqrt[n]{n!} \geq 1$, avem că $\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \leq a^n$. De aici, pentru $a<1$, deducem că seria este convergentă.

Din $\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n}=n$, obţinem că $\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \geq \dfrac{a^n}{n}$. Dar, pentru $a \geq 1$, seria $\sum \dfrac{a^n}{n}$ este divergentă. Rezultă că seria dată este divergentă.

2.76 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}.\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}.\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}.$$

R: Se aplică criteriul rădăcinii cu limită. Seriile sunt convergente.

2.77 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n.\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} a^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

R: Se aplică criteriul rădăcinii cu limită. Pentru $a<1$ seriile sunt convergente, pentru $a>1$, seriile sunt divergente. Pentru $a=1$, şirurile termenilor au limita e, deci seriile sunt divergente.

2.78 *Să se stabilească natura seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},\quad a>0.$$

R: Se aplică criteriul rădăcinii cu limită. Pentru $a < \frac{1}{e}$ seria este convergentă, pentru $a > \frac{1}{e}$, seria este divergentă. Pentru $a = \frac{1}{e}$, seria devine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

Din $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, obţinem:

$$\frac{1}{e^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} > \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} > 0.$$

Rezultă că seria dată este divergentă.

2.79 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}. \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

R: Se aplică criteriul raportului cu limită. Seriile sunt convergente.

2.80 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \cdots \cdot (5n-3)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \cdots \cdot (4n+1)}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}.$$

R: Se aplică criteriul raportului cu limită. 1) Serie divergentă. 2) Serie convergentă.

2.81 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, \quad a > 0.$$

R: 1) Se aplică criteriul raportului cu limită. Seria este convergentă. 2) Criteriul raportului dă dubiu. Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel. Se obţine $\lambda = -\ln a$. Seria este convergentă pentru $a < \frac{1}{e}$ şi divergentă pentru $a > \frac{1}{e}$. Pentru $a = \frac{1}{e}$ se obţine seria armonică, deci divergentă.

2.82 *Să se studieze natura seriei cu termenul general* a_n *definit astfel:* $a_1 \in (0,1)$, $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, *pentru* $n \geq 1$.

R: Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = 2^x - x - 1$. Deoarece $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 1$ şi $f'(x) = 0$ pentru $x_0 = -\ln(\ln 2)$, avem tabloul de variaţie:

x	0		$-\ln(\ln 2)$		1
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	0

Deci $f(x) < 0$ pentru orice $x \in (0,1)$, de unde $2^x < x + 1$, $\forall x \in (0,1)$.

Arătăm, prin inducţie, că $a_n \in (0,1)$. Avem că $a_1 \in (0,1)$. Presupunem că $a_n \in (0,1)$. Dar $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1 > 2^0 - 1 = 0$ şi $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1 < 2^1 - 1 = 1$. Apoi: $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - a_n - 1 < 0$, deci este un şir descrescător şi mărginit. Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Rezultă că $2^\ell - \ell - 1 = 0$, cu rădăcinile 0 şi 1. Deoarece (a_n) este descrescător, urmează că $\ell = 0$. Putem deci scrie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2 < 1$$

şi conform criteriului raportului seria este convergentă.

2.83 *Să se stabilească natura seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot \left[\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n+1)} \right]^2, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-.$$

R: Criteriul raportului dă dubiu. Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel. Deoarece $\lambda = 4a + 3$, dacă $\alpha > -\dfrac{1}{2}$ seria este convergentă, dacă $\alpha < -\dfrac{1}{2}$ seria este divergentă, dacă $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ seria devine:

$$4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

care este divergentă.

2.84 *Să se stabilească natura seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 \cdot \dots \cdot (4n-3)^2}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot \dots \cdot (4n-1)^2}.$$

R: Criteriul raportului şi criteriul lui Raabe-Duhamel dau dubiu. Aplicăm criteriul lui Bertrand:

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \cdot \ln n = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{16n^2 + 8n + 1} = 0 < 1,$$

deci seria este divergentă.

2.85 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}.\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{n+2}.$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \lg \frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}.\ \ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n+\beta}{\gamma n+\delta}\right)^n,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

$$5)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.\ \ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n) \ln (\ln n)}.$$

2.86 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot n^p}{(q+1)\,(q+2) \cdots (q+n)},\quad p, q \in \mathbf{N}.$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha\,(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)},\quad \alpha > 0.$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha n) \cdot \ln n}{\sqrt{n}},\quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\,(2\alpha+1) \cdots (n\alpha+1)}{(\beta+1)\,(2\beta+1) \cdots (n\beta+1)},\quad \alpha, \beta > 0.$$

2.87 *Să se stabilească natura seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1) b(b+1) \cdots (b+n-1)}{c(c+1) \cdots (c+n-1)},$$

cu $a, b \in \mathbf{R}$*,* $c \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$*, numită* seria hipergeometrică.

R: Incepând de la un rang N care depinde de a, b şi c, termenii seriei au acelaşi semn şi deci putem presupune că seria este cu termeni pozitivi. Avem:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1+c-a-b}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

cu

$$\theta_n = \frac{[c - ab - (a+b)\,(1+c-a-b)]\, n^3 - ab\,(1+c-a-b)\, n^2}{n(n+a)(n+b)}.$$

Şirul (θ_n) este convergent, deci mărginit. Conform criteriului lui Gauss, pentru $c > a+b$ seria este convergentă, iar pentru $c \leq a+b$ seria este divergentă.

2.88 *Să se stabilească natura seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\,(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{\beta\,(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)} \cdot x^n,\quad \alpha, \beta, x > 0.$$

R: Se aplică criteriul raportului cu limită. Pentru $x \in (0,1)$ seria este convergentă, pentru $x \in (1,\infty)$ seria este divergentă. Pentru $x = 1$ seria este convergentă dacă $b > a+1$ şi divergentă dacă $b \leq a+1$.

2.89 *Să se stabilească natura seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot b^n}{(b+a_1)(2b+a_2)\cdots(nb+a_n)},$$

unde $b > 0$*, iar* (a_n) *este un şir de numere reale pozitive, convergent către* a *cu* $a \neq b$*.*

2.6 Serii cu termeni oarecare

2.90 *Să se arate că dacă* $\sum a_n^2$ *este o serie convergentă, atunci seria* $\sum \frac{a_n}{n}$ *este absolut convergentă.*

R: Din $\left[|a_n| - \frac{1}{n}\right]^2 \geq 0$ deducem că $\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$. Deoarece $\sum a_n^2$ şi $\sum \frac{1}{n^2}$ sunt convergente, conform primului criteriu de comparaţie rezultă că seria $\sum \frac{|a_n|}{n}$ este convergentă.

2.91 *Să se arate că seria* $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ *este convergentă pentru* $\alpha > 0$*.*

R: Pentru $\alpha > 0$, şirul $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}$ este monoton descrescător la zero, iar

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sin\frac{nx}{2} \sin\frac{(n+1)x}{2},$$

pentru $x \neq 2k\pi$, cu k număr întreg. De unde,

$$|s_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|},$$

adică (s_n) este mărginit.

2.92 *Să se studieze natura seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{x^2+n}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

R: Pentru $\forall x \in \mathbf{R}$, şirul $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{x^2+n}}$ este monoton descrescător la zero, iar

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2n\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} \sin\frac{n\pi}{3} \cos\frac{(n+1)\pi}{3},$$

cu $|s_n| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, deci mărginit. Seria este convergentă.

2.93 *Să se arate că seria armonică alternată*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

este convergentă şi să se determine suma sa.

R: Şirul $(\frac{1}{n})$ este monoton descrescător la zero. După criteriul lui Leibniz seria este convergentă. Pentru calculul sumei folosim *identitatea lui Catalan-Botez*:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

care, dacă notăm $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, revine la: $a_{2n}-2\left(\frac{a_n}{2}\right)=a_{2n}-a_n$. Rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2.$$

2.94 *Să se arate că seria armonică generalizată (sau seria lui Riemann) alternată*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^\alpha}$$

în care $0<\alpha\leq 1$ *este simplu convergentă.*

R: Şirul $(\frac{1}{n^\alpha})$ cu $\alpha>0$ este monoton descrescător la zero. După criteriul lui Leibniz seria este convergentă. Pentru $\alpha>1$ seria este absolut convergentă. In concluzie, pentru $0<\alpha\leq 1$ seria lui Riemann alternată este simplu convergentă.

2.95 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}.\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n}.$$

R: Serii alternate convergente.

2.96 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2},\quad \alpha\in\mathbf{R}.$$

R: 1) $a_n=\sin\left[\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\right)+n\pi\right]=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\right)$ şi se aplică criteriul lui Leibniz.

2) Deoarece $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2}<\frac{1}{n^2}$, seria este absolut convergentă.

2.97 *Să se stabilească natura seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin n\theta}{n}.$$

2.98 *Să se studieze convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n+1}.$$

R: Pentru studiul absolutei convergenţe folosim criteriul rădăcinii. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2 x}{\sqrt[n]{n+1}}=2\sin^2 x.$$

Pentru $2\sin^2 x<1$ seria este absolut convergentă şi deci convergentă. Pentru $2\sin^2 x=1$ obţinem seria armonică alternată care este simplu convergentă. Pentru $2\sin^2 x>1$, termenul general al seriei nu tinde la 0, deci seria este divergentă.

2.99 *Să se efectueze produsul în sens Cauchy al seriilor absolut convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\ \text{şi}\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$$

şi să se deducă de aici suma ultimei serii.

R: Seria produs $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ are termenul general $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0$, adică $c_0=1$, iar, pentru $n\geq 1$:

$$\begin{aligned} c_n &= 1\cdot\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{1}{1!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots-\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{1!}+\frac{1}{n!}\cdot 1= \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\left[1-\frac{n}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{1!}+(-1)^n\right]=\frac{(-1)^n}{n!}(1-1)^n=0. \end{aligned}$$

Deci seria produl are suma egală cu 1. Cum $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=e$, după teorema lui Mertens, rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1}{e}$.

2.100 *Să se efectueze produsul în sens Cauchy al seriilor*

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\ \text{şi}\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

R: Ambele serii sunt divergente deoarece ternenii lor generali nu tind la zero. Seria produs $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ are termenul general

$$\begin{aligned} c_n &= 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \cdots - \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 1 = \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left[2^n - \left(2^{n-1} + \cdots + 2\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^2}\right) - \frac{3}{2}\right] = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Se observă că seria produs este convergentă, fiind seria geometrică cu raţia $q = \dfrac{3}{4} < 1$. Rezultă de aici că ipotezele teoremei lui Mertens sunt suficiente dar nu şi necesare.

Capitolul 3

Limite de funcţii

3.1 Limita unei funcţii reale de o variabilă reală

3.1 *Să se calculeze:*

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}.\quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}.$$

$$3)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}.\quad 4)\ \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}.$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.\quad 6)\ \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}.$$

3.2 *Să se calculeze:*

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}.\quad 2)\ \lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}.$$

$$3)\ \lim_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}.\quad 4)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x.$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.\quad 6)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

3.3 *Să se arate că funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, definită prin*

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

nu tinde către infinit când $x\to 0$.

R: Pentru şirul $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}\to 0$, $f(x_n)=0$ şi deci tinde la 0.

3.4 *Să se arate că funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sin x$, nu are limită pentru $x\to\infty$.*

3.5 *Să se determine* $\alpha \in \mathbf{R}$ *a.î. funcţia* $f : (0,2] \to \mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x \ln(ex) + x^2}, & x \in (0,1), \\ \alpha + \dfrac{x}{e}, & x \in [1,2], \end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x = 1$.

3.6 *Să se arate că:*

$$1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0.\ \ 2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0,\ \ k \in \mathbf{N}^*.$$

3.7 *Să se cerceteze dacă funcţia* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *definită prin* $f(x) = [x]$, *are limită în punctul* $x = 2$.

3.8 *Să se calculeze:*

$$1)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^{x+1}.\ \ 2)\ \lim_{x\to 0} \left(1 + 2\sin^2 x\right)^{\dfrac{3}{x^2}}.\ \ 3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \arcsin 2x)}{\sin 3x}.$$

$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin 2x - \sin x}.\ \ 5)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$6)\ \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x - 9}}{x^2 + x - 6}.\ \ 7)\ \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x + 4} - \sqrt[3]{x + 22}}{\sqrt[4]{x + 11} - 2}.$$

$$8)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - \sqrt[4]{1 - 2x}}{x + x^2}.\ \ 9)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$10)\ \lim_{x\nearrow 1} \frac{\left(\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2}{1 - x^2}.\ \ 11)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right).\ \ 12)\ \lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln \frac{x+1}{x}\right).$$

$$13)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.\ \ 14)\ \lim_{x\to 0} \left[1 + \ln(1 + x) + \cdots + \ln(1 + nx)\right]^{\dfrac{1}{x}}.$$

$$15)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{p_1^{\alpha_1 x} + p_2^{\alpha_2 x} + \cdots + p_n^{\alpha_n x}}{n}\right)^{\dfrac{1}{x}},\ p_i > 0,\ \alpha_i \in \mathbf{R}.$$

$$16)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x}}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}},\ \textit{cu } a, b > 0.$$

R: 1) e. 2) e^6. 3) $\dfrac{2}{3}$. 4) 1. 5) $-\dfrac{1}{3}$. 6) $-\dfrac{7}{30}$. 7) $\dfrac{112}{27}$. 8) $\dfrac{1}{2}$. 9) $\dfrac{1}{2}$. 10) 1.
11) $\dfrac{2}{3}$. 12) Se ia $x = \dfrac{1}{y}$, $y \to 0$, limita este $\dfrac{1}{2}$. 13) 3. 14) $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
15) $\sqrt[n]{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{\alpha_n}}$. 16) $\sqrt{ab}$.

3.9 *Să se determine parametrul real* α *a.î.*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-ax\right),$$

să fie finită şi nenulă.

R: Adunăm şi scădem x. Se obţine $a=2$ şi limita egală cu $\frac{5}{6}$.

3.10 *Să se determine* $a,b,c\in\mathbf{R}$ *a.î.*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x}-ax^2-bx-c\right)=0.$$

R: $a=\sqrt{5}$, $b=\frac{7}{2\sqrt{5}}$, $c=-\frac{209}{40\sqrt{5}}$.

3.11 *Să se calculeze:*

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(xe^x\right)-\cos\left(xe^{-x}\right)}{x^3}.\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cdots\cdot\cos nx}{x^2},\ n\in\mathbf{N}^*.$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^n-\sin^n x}{x^{n+2}},\ n\geq 2.\quad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x^n-\ln^n\left(1+x\right)}{x^{n+1}}.\quad 5)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

R: 1) Se ţine seama că $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ şi se obţine limita 2. 2) Notăm

$$a_n=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cdots\cdot\cos nx}{x^2}.$$

Avem că $a_1=\frac{1}{2}$ şi $a_n=a_{n-1}+\frac{n^2}{2}$. Se obţine $a_n=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{12}$. 3) Funcţia se mai scrie

$$\frac{\sin x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}=\frac{\sin x^n-x^n}{x^{n+2}}+\frac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}.$$

Se obţine limita $\frac{n}{6}$. 4) Funcţia se mai scrie

$$\frac{\operatorname{tg}x^n-\ln^n\left(1+x\right)}{x^{n+1}}=\frac{\operatorname{tg}x^n-x^n}{x^{n+1}}+\frac{x^n-\ln^n\left(1+x\right)}{x^{n+1}}.$$

Se obţine limita $\frac{n}{2}$. 5) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3.12 *Să se calculeze:*

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cdot\sqrt[3]{\cos x}-\cos x\cdot\sqrt[3]{\sin x}}{\ln\left(\operatorname{tg}x-\cos 2x\right)}.\quad 2)\ \lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right).$$

R: 1) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{6}$. 2) Putem scrie

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=\frac{x^2}{x\,(x+1)}\cdot e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x\,(x+1)}}-1}{\frac{1}{x\,(x+1)}}.$$

3.2 Limita unei funcţii de o variabilă vectorială

3.13 *Să se găsească şi să se reprezinte grafic mulţimile de definiţie ale următoarelor funcţii de două variabile:*

$$1)\ f\,(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.\ \ 2)\ f\,(x,y)=1+\sqrt{-\,(x-y)^2}.$$

$$3)\ f\,(x,y)=\ln\,(x+y)\,.\ \ 4)\ f\,(x,y)=x+\arccos y.$$

$$5)\ f\,(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}.\ \ 6)\ f\,(x,y)=\arcsin\frac{y}{x}.$$

$$7)\ f\,(x,y)=\sqrt{y\sin x}.\ \ 8)\ f\,(x,y)=\ln\left(x^2+y\right).$$

$$9)\ f\,(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+x^2+y^2}.\ \ 10)\ f\,(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}.$$

$$11)\ f\,(x,y)=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y}.\ \ 12)\ f\,(x,y)=\sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}.$$

3.14 *Să se găsească mulţimile de definiţie ale următoarelor funcţii de trei variabile:*

$$1)\ f\,(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.\ \ 2)\ f\,(x,y,z)=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z.$$

$$3)\ f\,(x,y,z)=\ln\,(xyz)\,.\ \ 4)\ f\,(x,y,z)=(xy)^z\,.\ \ 5)\ f\,(x,y,z)=z^{xy}.$$

$$6)\ f\,(x,y,z)=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}.\ \ 7)\ f\,(x,y,z)=\ln\left(-x^2-y^2+z^2-1\right).$$

3.15 *Se dă funcţia* $f:E\to\mathbf{R}$, $E\subset\mathbf{R}^2$. *Să se arate că:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\ell$$

d.d. pentru orice $\varepsilon>0$ *există un* $\delta\,(\varepsilon)>0$, *a.î. pentru orice* $(x,y)\in E$ *pentru care*

$$|x-x_0|<\delta\,(\varepsilon)\,,\ |y-y_0|<\delta\,(\varepsilon)\ \text{ să avem }\ |f(x,y)-\ell|<\varepsilon.$$

R: Afirmaţia rezultă din dubla inegalitate:

$$\max\left(|x-x_0|\,,|y-y_0|\right)\le\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\le\left(|x-x_0|+|y-y_0|\right).$$

3.16 *Folosind definiţia, să se demonstreze că:*

$$1) \lim_{(x,y)\to(2,4)} (2x+3y) = 16. \quad 2) \lim_{(x,y)\to(2,-3)} (4x+2y) = 2. \quad 3) \lim_{(x,y)\to(5,\infty)} \frac{xy}{y+1} = 1.$$

$$4) \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x}{y} = 1. \quad 5) \lim_{(x,y,z)\to(-1,2,0)} (2x+3y-2z) = 4.$$

R: 1) Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$, a.î. pentru orice $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ pentru care

$$|x-2| < \delta(\varepsilon), \ |y-4| < \delta(\varepsilon) \text{ să avem } |(2x+3y)-16| < \varepsilon.$$

Intr-adevăr,

$$|(2x+3y)-16| = |2(x-2)+3(y-4)| \le 2|x-2| + 3|y-3|.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Luăm $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{6}$. Atunci pentru $|x-2| < \delta(\varepsilon)$ şi $|y-4| < \delta(\varepsilon)$

$$|(2x+2y)-16| < 2\frac{\varepsilon}{6} + 3\frac{\varepsilon}{6} = \frac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon.$$

2) Este suficient să luăm $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{7}$. 3) $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{7}$.

3.17 *Să se arate că funcţia*

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y},$$

definită pentru $x \ne y$, nu are limită în origine.

R: Vom arăta că pentru şiruri diferite convergente la $\mathbf{0}$, obţinem limite diferite. Fie $\mathbf{x}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right)$. Observăm că punctele $\mathbf{x}_n$ sunt situate pe dreapta $y = 2x$ şi $\lim f(\mathbf{x}_n) = -3$. Fie apoi $\mathbf{x}'_n = \left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right)$. Punctele $\mathbf{x}'_n$ sunt situate pe dreapta $y = -x$ şi $\lim f(\mathbf{x}'_n) = 0$.

3.18 *Să se arate că funcţia*

$$f(x,y) = \frac{y^2+2x}{y^2-2x},$$

definită pentru $y^2 \ne 2x$, nu are limită în origine.

R: Vom arăta că pentru şiruri diferite convergente la $\mathbf{0}$, obţinem limite diferite. Fie $\mathbf{x}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Observăm că punctele $\mathbf{x}_n$ sunt situate pe parabola $y^2 = x$ şi $\lim f(\mathbf{x}_n) = -3$. Fie apoi $\mathbf{x}'_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$. Punctele $\mathbf{x}'_n$ sunt situate pe parabola $y^2 = 4x$ şi $\lim f(\mathbf{x}'_n) = 3$.

3.19 *Să se demonstreze că*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0.$$

R: Se ţine seama de inegalităţile:

$$0 < \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} < \frac{x^2+y^2+2\,|x|\,|y|}{|x|+|y|} < |x|+|y|\,.$$

3.20 *Să se arate că funcţia*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2},$$

definită pentru $x \neq 0$ *şi* $y \neq 0$*, are limitele iterate în origine egale cu zero, însă nu are limită în origine.*

R: In adevăr,

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0.$$

Insă pe parabola $x^2 = my$, avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{my^2}{(m^2+1)\,y^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Pentru diferite valori ale lui m se obţin valori diferite ale limitei, deci f nu are limită în origine.

3.21 *Să se cerceteze existenţa limitelor iterate şi a limitei în origine pentru următoarele funcţii:*

$$1)\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.\ \ 2)\ f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\cos\frac{1}{x}.$$

$$3)\ f(x,y) = \frac{2x-3y+x^2+y^2}{x+y}.\ \ 4)\ f(x,y) = \frac{2xy^2}{2x^2+5y^4}.$$

$$5)\ f(x,y) = \frac{y^2-2x}{y^2+2x}.\ \ 6)\ f(x,y) = \frac{x-y+2x^2+y^2}{x+y}.\ \ 7)\ f(x,y) = x\cos\frac{1}{y}.$$

$$8)\ f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},\ \ 9)\ f(x,y) = \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2},$$

$$10)\ f(x,y) = \frac{(x+y)\operatorname{tg}\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.\ \ 11)\ f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}.$$

$$12)\ f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.\ \ 13)\ f(x,y) = \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

$$14)\ f(x,y) = \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}.$$

R: 1) Există limitele iterate şi sunt egale cu 0, dar nu există limta în origine. 2) Nu există limitele iterate, deoarece $\sin\frac{1}{y}$ nu are limită pentru $y \to 0$ şi $\cos\frac{1}{x}$ nu are limită pentru $x \to 0$. Funcţia are însă limită în origine, deoarece

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |x| \cdot \left|\sin\frac{1}{y}\right| + |y| \cdot \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x| + |y| \to 0.$$

3) Există limitele iterate:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -3, \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 2.$$

Dacă limitele iterate există, sunt finite şi distincte nu există limita în punct. 8) Se ţine seama că

$$-|x+y| \leq |f(x,y)| \leq |x+y|.$$

9) Funcţia se mai scrie

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$$

iar

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} < 2\left(|x|+|y|\right).$$

3.22 *Să se calculeze*

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

R: Fie (x,y) în interiorul discului cu centrul în punctul $(1,0)$ şi de rază r. Obţinem $x = 1 + r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Deci

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\ln\left(1+r\cos\theta+e^{r\sin\theta}\right)}{r} = \infty.$$

3.23 *Să se calculeze*

$$1)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}. \quad 2)\ \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x}.$$

R: 1) Suntem în cazul de excepţie $\frac{0}{0}$. Raţionalizăm numitorul. Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{xy+1}+1\right) = 2.$$

2) Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = 2.$$

3.24 *Să se calculeze*

$$1)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}.\ \ 2)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x+y}.$$

$$3)\ \lim_{(x,y)\to(\infty,k)}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x.\ \ 4)\ \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

R: 1) Deoarece $\left|\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}\right|\leq x^2+y^2$, limita este 0. 2) Funcţia nu are limită. De exemplu, pe dreapta $y=mx$ se obţine o limită ce depinde de m. 3) Limita este e^k. 4) Putem presupune $x+y>1$. Limita este 0.

Capitolul 4

Funcţii continue

4.1 Continuitatea funcţiilor reale de o variabilă reală

4.1 *Să se determine α real a.î. următoarele funcţii să fie continue pe mulţimile lor de definiţie:*

1) $f : [1,3] \to \mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + x^2}, & x \in [1,2), \\ \alpha x + 3, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

2) $f : [0,2] \to \mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6 \sin \alpha(x-1)}{x-1}, & x \in [0,1), \\ -\alpha + 5x, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

R: 1) $\alpha = -\dfrac{1}{3}$. 2) $\alpha = -1$.

4.2 *Să se determine α real a.î. următoarele funcţii să fie continue în punctele indicate:*

1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\,(1 - \cos x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ \dfrac{\alpha^2}{2}, & x = 0, \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 0.$$

2) $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha \cdot \operatorname{arctg}\,(x-1)}{x^2 - 1}, & x \neq 1, \\ \alpha^2, & x = 1, \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 1.$$

3) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ x + e, & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 0.$$

4) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-16}, & x\neq 2,\\ \alpha, & x=2,\end{cases}\quad \text{în } x_0=2.$$

5) $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x)=\begin{cases}e^{3x}, & x\in[0,1],\\ \dfrac{\alpha\sin(x-1)}{x^2-5x+4}, & x\in(1,\pi],\end{cases}\quad \text{în } x_0=1.$$

6) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x)=\begin{cases}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ e^2, & x=0,\\ (\sin x+\cos x)^{\frac{\alpha}{x}}, & x>0,\end{cases}\quad \text{în } x_0=0.$$

R: 1) $\alpha\in\{0,1\}$. 2) $\alpha\in\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}$. 3) $\alpha=1$. 4) $\alpha=\dfrac{1}{2}$. 5) $\alpha=-3e^3$. 6) $\alpha=2$.

4.3 *Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiilor:*

$$1)\ f(x)=\left[\sqrt{x}\right]-\sqrt{x},\ x>0.\ \ 2)\ f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right],\ x\neq 0,\ f(0)=1.$$

$$3)\ f(x)=x\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0,\ f(0)=0.\ \ 4)\ f(x)=x^p\operatorname{arctg}\frac{1}{x},\ x\neq 0,\ f(0)=0,\ p>0.$$

R: 1) Discontinuă în $x=n^2$, $n\in\mathbf{N}$. 2) Discontinuă în $x=\dfrac{1}{k}$, cu k întreg nenul. 3) şi 4) Funcţii continue pe $\mathbf{R}$.

4.4 *Să se studieze continuitatea funcţiei* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *definită prin:*

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x^2, & x\in\mathbf{Q},\\ -\dfrac{1}{4}x, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

R: Dacă $x_0\in\mathbf{R}$ este un punct de continuitate pentru f, atunci pentru orice şir $x_n\in\mathbf{Q}$, $x_n\to x_0$ şi orice şir $x_n'\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $x_n'\to x_0$, avem: $x_0^3-x_0^2=-\dfrac{1}{4}x_0$, de unde rezultă că $x_0\in\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}$.

4.5 *Fie funcţia* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, *definită prin*

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\in\mathbf{Q},\\ 1-x, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Să se studieze continuitatea, să se arate că $f([0,1])$ *este un interval şi că* f *nu are proprietatea lui Darboux.*

R: Punctul $x_0 \in [0,1]$ este un punct de continuitate pentru f d.d. $\sqrt{x_0} = 1 - x_0$, adică $x_0 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ este singurul punct de continuitate al lui f. Pentru orice $x \in [0,1]$, $\sqrt{x}, 1-x \in [0,1]$, deci $f([0,1]) \subset [0,1]$. Fie $y \in [0,1]$. Dacă $y \in \mathbf{Q}$, există $x = y^2$ ($x \in \mathbf{Q}$) a.î. $f(x) = y$, iar dacă $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, există $x = 1 - y$ ($x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$) a.î. $f(x) = y$. Aşadar, $[0,1] \subset f([0,1])$. Avem: $f([0,1]) = [0,1]$. Pentru a arăta că f nu are proprietatea lui Darboux, fie intervalul $\left[\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{4}\right] \subset [0,1]$, cu $f\left(\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{3}$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$. Considerăm $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt[4]{17}} \in \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$ şi arătăm că ecuaţia $f(x) = \lambda$ nu are soluţii în intervalul $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{4}\right)$. Dacă $x \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{17}}$, dă $x = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \notin \mathbf{Q}$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $1 - x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{17}}$, dă $x = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{17}} \notin \left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{4}\right)$, deoarece $1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{17}} > \dfrac{1}{4}$.

4.2 Continuitatea uniformă a funcţiilor de o variabilă

4.6 *Să se arate că funcţia $f(x) = x^3$, $x \in [1,3]$ este uniform continuă pe $[1,3]$.*

R: Intr-adevăr,

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| \cdot (x^2 + xx' + x'^2) < 27\,|x - x'| < \varepsilon,$$

pentru orice $x, x' \in [1,3]$ pentru care $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, cu $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{27}$.

4.7 *Să se arate că funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin*

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + x,$$

este uniform continuă pe $(0,\infty)$.

R: Fie $x, x' \in (0,\infty)$. Avem

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| \left(1 + \frac{1}{(1+x)(1+x')}\right) < 2\,|x - x'| < \varepsilon,$$

dacă $|x - x'| < \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

4.8 *Să se arate că funcţia $f : (-1,\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin*

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + x,$$

nu este uniform continuă pe $(-1,\infty)$.

R: Intr-adevăr, să considerăm şirurile $x_n = -\dfrac{n+1}{n+2}$, $x'_n = -\dfrac{n}{n+1}$. Avem

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Punctele x_n şi x'_n sunt oricât de apropiate pentru n suficient de mare, însă

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 1,$$

deci funcţia nu este uniform continuă.

4.9 *Să se arate că funcţia* $f : [a, e] \to \mathbf{R}$*,* $a > 0$*, definită prin* $f(x) = \ln x$*, este uniform continuă pe* $[a, e]$*.*

R: Funcţia f este continuă pe intervalul $[a, e]$ mărginit şi închis, deci este uniform continuă pe acest interval.

4.10 *Să se arate că funcţia* $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$*, definită prin* $f(x) = \ln x$*, este nu uniform continuă pe* $(0, 1)$*.*

R: Fie $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x'_n = \dfrac{1}{n^2+1}$. Avem $|x_n - x'_n| < \delta$, dar

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left|\ln \frac{n^2+1}{n}\right| \to \infty.$$

4.11 *Să se studieze uniforma continuitate a funcţiei* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, definită prin* $f(x) = x \sin^2 x^2$*.*

R: Fie

$$x_n = \sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}},\ x'_n = \sqrt{(4n+3)\frac{\pi}{2}}.$$

Avem

$$|x_n - x'_n| = \frac{\pi}{\sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}} + \sqrt{(4n+3)\frac{\pi}{2}}} \to 0$$

şi

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left|\sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(4n+3)\frac{\pi}{2}}\right| \to 0.$$

Dar, pentru $x''_n = \sqrt{2n\pi}$, avem

$$|f(x_n) - f(x''_n)| = \left|\sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi} \cdot 0\right| \to \infty.$$

Aşadar, f nu este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

4.12 *Să se studieze uniforma continuitate a următoarelor funcţii:*

$$1)\ f:(0,1)\to\mathbf{R},\ \ f(x)=\ln x.\ \ 2)\ f:[a,e]\to\mathbf{R},\ \ f(x)=\ln x,\ \ a>0.$$

$$3)\ f:\left(0,\frac{1}{\pi}\right)\to\mathbf{R},\ \ f(x)=\sin\frac{1}{x}.\ \ 4)\ f:\mathbf{R}\to[-1,1],\ \ f(x)=\sin x^2.$$

$$5)\ f:[0,1]\to\mathbf{R},\ \ f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}.\ \ 6)\ f:\mathbf{R}\to[-1,1],\ \ f(x)=\cos x.$$

$$7)\ f:(0,1)\to\mathbf{R}_+,\ \ f(x)=\frac{1}{x}.\ \ 8)\ f:[0,\infty)\to\mathbf{R},\ \ f(x)=x^2.$$

R: 1) Nu. 2) Da. 3) Nu. 4) Nu. 5) Da. 6) Da, se ţine seama că

$$|\cos x-\cos x'|\le 2\left|\sin\frac{x-x'}{2}\right|\le 2\,|x-x'|\,.$$

7) Nu, este suficient să luăm $x_n=\dfrac{1}{n}$ şi $x'_n=\dfrac{1}{n+1}$. 8) Nu, este suficient să luăm $x_n=n$ şi $x'_n=n+\dfrac{1}{n}$.

4.3 Continuitatea funcţiilor de o variabilă vectorială

4.13 *Să se arate că funcţia*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbf{R}^2$.

R: Funcţia este continuă în orice punct în care $x^2+y^2\ne 0$, adică în orice punct cu excepţia originii. Rămâne de verificat numai continuitatea în origine, ceea ce revine la a arăta că funcţia are limită în origine şi aceasta este egală cu 0. Avem, însă:

$$\left|\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right|<\frac{|x|\,|y|}{x^2+y^2}\cdot|x|\cdot y^2\le\frac{1}{2}\cdot|x|\cdot y^2,$$

deoarece $x^2+y^2\ge 2\,|x|\,|y|$. Deci limita funcţiei este 0.

4.14 *Să se arate că funcţia*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbf{R}^2$.

R: Funcţia este continuă în orice punct în care $x^2+y^2\neq 0$, adică în orice punct cu excepţia originii. Rămâne de verificat numai continuitatea în origine, ceea ce revine la a arăta că funcţia are limită în origine şi aceasta este egală cu 0. Putem scrie:

$$\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}=\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

Insă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3}=1$ şi

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}<|x|+|y|.$$

4.15 *Să se cerceteze continuitatea funcţiei*

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2\leq 1,\\ 0, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

R: Punem $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Funcţia este continuă pe $\mathbf{R}^2$.

4.16 *Să se arate că funcţia*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

este continuă parţial în raport cu x şi y, dar nu este continuă în origine.

R: Fie $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$. Funcţiile $f(x,y_0)$ şi $f(x_0,y)$ sunt continue în orice punct. Funcţia $f(x,y)$ nu are limită în origine.

4.17 *Să se cerceteze continuitatea următoarelor funcţii:*

$$1)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$2)\ f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & x>0 \text{ şi } y>0,\\ 1, & x=0 \text{ sau } y=0.\end{cases}$$

R: 1) Se ţine seama că $1-\cos\left(x^3+y^3\right)=2\sin^2\dfrac{x^3+y^3}{2}$. Funcţia este continuă. 2) Putem scrie

$$(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}=\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$$

şi $\dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$. Funcţia este continuă.

4.18 *Să se discute după valorile parametrului α continuitatea următoarelor funcţii:*

$$1)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}\,(x^2+y^2)}, & 0<x^2+y^2<\dfrac{\pi}{2},\\ \alpha, & (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

$$2)\ f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\,,\\ \alpha, & (x,y,z)=(0,0,0)\,.\end{cases}$$

$$3)\ f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{3x+2y-z+x^2+yz}{x+y+z}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\,,\\ \alpha, & (x,y,z)=(0,0,0)\,.\end{cases}$$

$$4)\ f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{(x+y+z)\operatorname{tg}\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\,,\\ \alpha, & (x,y,z)=(0,0,0)\,.\end{cases}$$

R: 1) Notăm $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Avem $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{r}}{\operatorname{tg} r}=\dfrac{1}{2}$. Funcţia este continuă pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

2) Fie $x=\ell t$, $y=mt$, $z=nt$, $t\in\mathbf{R}$ o dreaptă prin origine. Deoarece

$$\lim_{t\to 0}f(\ell t,mt,nt)=\frac{\ell^2m^2n^2}{\ell^6+m^6+n^6},$$

deci depinde de direcţie, rezultă că f nu are limită în origine. Funcţia este continuă pe $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

Capitolul 5

Derivate şi diferenţiale

5.1 Derivata şi diferenţiala funcţiilor de o variabilă

5.1 *Utilizând definiţia, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii, în punctele specificate:*

$$
\begin{array}{ll}
1)\ f(x)=\sqrt{x+2},\ \text{în } x_0=7. & 2)\ f(x)=\ln\left(x^2+5x\right),\ \text{în } x_0=1. \\
3)\ f(x)=\sin 3x^2,\ \text{în } x_0=\sqrt{\pi}. & 4)\ f(x)=\arcsin(x-1),\ \text{în } x_0=1. \\
5)\ f(x)=e^{3x},\ \text{în } x_0=1. & 6)\ f(x)=\operatorname{tg} x,\ \text{în } x_0=\dfrac{\pi}{4}.
\end{array}
$$

5.2 *Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcţii, în punctele specificate:*

$$
1)\ f:\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & x\in(-\frac{1}{2},0],\\ 2x, & x\in(0,\infty),\end{cases}\quad \text{în } x_0=0.
$$

$$
2)\ f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2}, & x\in(0,2],\\ \dfrac{9}{8}x+\dfrac{7}{4}, & x\in(0,\infty),\end{cases}\quad \text{în } x_0=2.
$$

R: 1) $f'(0)=2$. 2) $f'(2)=\dfrac{9}{8}$.

5.3 *Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:*

$$
\begin{array}{ll}
1)\ f(x)=x^4+5x^3-8. & 2)\ f(x)=x^2+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}. \\
3)\ f(x)=x\cos x. & 4)\ f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}. \\
5)\ f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}. & 6)\ f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x+1}. \\
7)\ f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}. & 8)\ f(x)=e^{x^2\cos x}.
\end{array}
$$

R: Se obţine:

1) $f'(x)=4x^3+15x^2$. 2) $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

3) $f'(x) = \cos x - x\sin x$. 4) $f'(x) = -\dfrac{x^2-2x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

5) $f'(x) = \dfrac{2\cos x+1}{\left(2+\cos x\right)^2}$. 6) $f'(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{x+2}{x+1}$.

7) $f'(x) = -\dfrac{4}{3}\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2+1}{1-x^2}\right)^2}$.

8) $f'(x) = \left(2x\cos x - x^2\sin x\right)e^{x^2\cos x}$.

5.4 *Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:*

1) $f(x) = \ln\left(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$. 2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

3) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \dfrac{k}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)$. 4) $f(x) = 5\operatorname{sh}^3\dfrac{x}{15} + 3\operatorname{sh}^5\dfrac{x}{15}$.

5) $f(x) = e^x\operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$. 6) $f(x) = \dfrac{x^x}{e^x}\left(x\ln x - x - 1\right)$.

7) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$. 8) $f(x) = \log_{e^2}\left(x^n+\sqrt{x^{2n}+1}\right)$.

R: Se obţine:

1) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\left(4\sin^2 x-1\right)}}$. 2) $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^3 x}$.

3) $f'(x) = \sqrt{x^2+k}$. 4) $f'(x) = \operatorname{sh}^2\dfrac{x}{15}\operatorname{ch}^3\dfrac{x}{15}$.

5) $f'(x) = e^x\operatorname{arctg} e^x$. 6) $f'(x) = x^{x+1}e^{-x}(\ln x)(\ln x - 1)$.

7) $f'(x) = \sqrt{a^2-x^2}$. 8) $f'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n}+1}}$.

5.5 *Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:*

1) $f(x) = \ln\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\sin x}\right)$.

2) $f(x) = \dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{3}\ln(1+x) - \dfrac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

4) $f(x) = 3b^2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b-x}} - (3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$.

R: 1) $f'(x) = \dfrac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}$. 2) $f'(x) = \dfrac{x(x-3)}{x^4-1}$. 3) $f'(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$.

4) $f'(x) = 4x\sqrt{\dfrac{x}{b-x}}$.

5.6 *Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:*

1) $f(x) = -\dfrac{\arcsin x}{x} + \ln \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

2) $f(x) = \ln \sqrt{x^4+x^2+1} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{3}}$.

3) $f(x) = \dfrac{x}{4(x^2+1)^2} + \dfrac{3x}{8(x^2+1)} + \dfrac{3}{8} \operatorname{arctg} x$.

4) $f(x) = \dfrac{5}{2}\sqrt{(2x^2+8x+1)} - \dfrac{13}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}(x+2) + \sqrt{(2x^2+8x+1)}\right)$.

R: Se obţine:

1) $f'(x) = \dfrac{\arcsin x}{x^2}$. 2) $f'(x) = \dfrac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}$.

3) $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$. 4) $f'(x) = \dfrac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$.

5.7 *Să se arate că derivata unei funcţii pare este o funcţie impară, iar derivata unei funcţii impare este o funcţie pară.*

5.8 *Să se arate că derivata unei funcţii periodice este o funcţie periodică.*

5.9 *Să se arate că funcţia* $y = xe^{-x}$ *satisface relaţia* $xy' = (1-x)y$.

5.10 *Să se arate că funcţia* $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ *satisface relaţia* $xy' = \left(1-x^2\right)y$.

5.11 *Să se arate că funcţia* $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$ *satisface relaţia* $xy' = y(y\ln x - 1)$.

5.12 *Să se calculeze derivatele de ordinul doi ale următoarelor funcţii:*

1) $f(x) = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$. 2) $f(x) = (\arcsin x)^2$. 3) $f(x) = e^{x^2}$.
4) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$. 5) $f(x) = \left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x$. 6) $f(x) = \sin^2 x$.

R: Se obţine:

1) $f''(x) = 56x^6 + 210x^4$. 2) $f''(x) = \dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \arcsin x$.

3) $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$. 4) $f''(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$.

5) $f''(x) = 2\operatorname{arctg} x + 2\dfrac{x}{x^2+1}$. 6) $f''(x) = 2\cos 2x$.

5.13 *Să se calculeze derivatele de ordinul* n *ale următoarelor funcţii:*

1) $f(x) = e^{ax}$. 2) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$. 3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-a^2}$.

4) $f(x) = \cos x$. 5) $f(x) = \sin x$. 6) $f(x) = \ln \dfrac{2x}{x^2-1}$.

7) $f(x) = 2^x$. 8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$. 9) $f(x) = \ln(ax+b)$.

10) $f(x) = e^{ax}\cdot e^{bx}$. 11) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$. 12) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

R: 3) Se ţine seama de identitatea: $\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$.

4) $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$. 5) $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

6). $f'(x)=-\dfrac{x^2+1}{x(x^2+1)}$ şi se scrie fracţia ca sumă de fracţii simple.

7) $f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2$.

8) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$, se obţine $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

9) $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$. 10) $f^{(n)}(x)=e^{ax}\cdot e^{bx}(a+b)^n$.

11) $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

12) Avem: $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

5.14 *Fie $f(x)=x^2\cdot e^{3x}$. Să se calculeze $f^{(10)}(x)$.*

R: Se aplică formula lui Leibniz. Se obţine: $f^{(10)}(x)=3^9\cdot e^{3x}\cdot\left(3x^2+20x+30\right)$.

5.15 *Fie $f(x)=x^2\cdot\sin x$. Să se calculeze $f^{(20)}(x)$.*

R: Se aplică regula lui Leibniz. Se obţine: $f^{(20)}(x)=x^2\sin x-40x\cos x-380\sin x$.

5.16 *Utilizând regula lui Leibniz, să se calculeze derivatele de ordinul n ale funcţiilor:*

1) $f(x)=x\cdot e^x$. 2) $f(x)=x^2\cdot e^{-2x}$. 3) $f(x)=\left(1-x^2\right)\cos x$.
4) $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$. 5) $f(x)=x^3\ln x$.

5.17 *Se consideră funcţia polinomială $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. Să se calculeze suma: $S=\sum_{k=1}^{4}\dfrac{1}{x_k-2}$, unde x_k sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x)=0$.*

R: Din $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, prin derivare, deducem:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{x-x_k}.$$

Deci $S=-\dfrac{f'(2)}{f(2)}=-\dfrac{49}{31}$.

5.18 *Să se determine cu cât se modifică (aproximativ) latura unui pătrat dacă aria sa creşte de la $9\,m^2$ la $9,1\,m^2$.*

R: Dacă x este aria pătratului şi y latura sa, atunci $y=\sqrt{x}$. Se dau: $x_0=9$, $h=0,1$. Creşterea laturii pătratului este dată de:

$$y-y_0\approx dy=f'(x)\cdot h=\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 0,1=0,016\,m.$$

5.19 *Să se găsească creşterea $y - y_0$ şi diferenţiala dy ale funcţiei $y = 5x + x^2$ în punctul $x_0 = 2$, dacă $h = 0,001$.*

R: $y - y_0 = 0,009001$ şi $dy = 0,009$.

5.20 *Să se calculeze diferenţiala funcţiei $y = \cos x$ în punctul $x_0 = \frac{\pi}{6}$, pentru $h = \frac{\pi}{36}$.*

5.21 *Să se calculeze diferenţiala funcţiei $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ în punctul $x_0 = 9$, pentru $h = -0,01$.*

5.22 *Să se calculeze diferenţialele funcţiilor:*

$$1)\ f(x) = \frac{1}{x^n}. \quad 2)\ f(x) = x\ln x - x. \quad 3)\ f(x) = \frac{x}{1-x}.$$
$$4)\ f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}. \quad 5)\ f(x) = x^2 e^{-x}. \quad 6)\ f(x) = e^x \sin x.$$

R: Se obţine:
1) $df(x) = -\frac{n}{x^n + 1}\,dx$. 2) $df(x) = \ln x\,dx$. 3) $df(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$.
4) $df(x) = \frac{2}{x^2 - 1}\,dx$. 5) $df(x) = x(2-x)\,e^{-x}dx$. 6) $df(x) = e\,({}^x \sin x + \cos x)\,dx$.

5.23 *Să se calculeze diferenţialele de ordinul doi ale funcţiilor:*

$$1)\ f(x) = \sqrt{1-x^2}. \quad 2)\ f(x) = \arccos x. \quad 3)\ f(x) = \sin x \ln x.$$
$$4)\ f(x) = \frac{1}{x}\ln x. \quad 5)\ f(x) = x^2 e^{-x}. \quad 6)\ f(x) = e^x \sin x.$$

5.24 *Să se arate că:*

$$d^n(\operatorname{arctg} x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \cdot \sin\left(n \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) dx^n.$$

5.2 Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

5.25 *Să se determine abscisele punctelor de extrem ale funcţiilor:*

$$1)\ f(x) = 2\cos x + x^2. \quad 2)\ f(x) = x^2(x-12)^2. \quad 3)\ f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$
$$4)\ f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}. \quad 5)\ f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x. \quad 6)\ f(x) = 2\cos\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{3}.$$

R: 1) $x_0 = 0$ este punct de minim.
2) $x_1 = 0$, $x_2 = 12$ sunt puncte de minim, $x_3 = 6$ este punct de maxim.
3) $x_1 = 0$ este punct de maxim, $x_2 = 2$ este punct de minim.
4) $x_{1,2} = \pm 1$ sunt puncte de minim, $x_3 = 0$ este punct de maxim.
5) $x_k = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ sunt puncte de minim, $x'_k = \frac{\pi}{6} + k\pi$ sunt puncte de maxim.
6) $x_k = 12k\pi$ şi $x'_k = 12\left(k \pm \frac{2}{5}\right)\pi$ sunt puncte de maxim, $y_k = 6(2k+1)\pi$ şi $y'_k = 12\left(k \pm \frac{1}{5}\right)\pi$ sunt puncte de minim.

5.26 *Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$ şi $a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x \geq n$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se arate că atunci $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$.*

R: Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x$. Avem că $f(x) \geq n = f(0)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci $x_0 = 0$ este un punct de minim pentru f şi conform teoremei lui Fermat: $f'(0) = 0$.

5.27 *Fie $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ a.î. $a^{x^2} \cdot b + b^{x^2} \cdot a \geq 2ab$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se arate că $ab = 1$.*

R: Fie uncţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a^{x^2} \cdot b + b^{x^2} \cdot a$. Avem că $f(x) \geq 2ab = f(1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci $x_0 = 1$ este un punct de minim pentru f şi conform teoremei lui Fermat: $f'(1) = 0$.

5.28 *Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcţia $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sin x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

R: Funcţia nu este derivabilă în $\frac{\pi}{4}$.

5.29 *Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcţiile $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$, definite prin:*

$$1)\ f(x) = |x - 1|.\ \ 2)\ f(x) = |x - 1|^3.$$

R: 1) Nu. 2) Da, $c = 1$.

5.30 *Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcţiile $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, definite prin:*

$$1)\ f(x) = |\sin x|.\ \ 2)\ f(x) = \left|\sin^3 x\right|.$$

R: 1) Nu. 2) Da, $c = 0$.

5.31 *Să se arate că polinomul lui Legendre $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$ are n rădăcini distincte în intervalul $(-1, 1)$.*

R: Se aplică de n ori teorema lui Rolle funcţiei $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$.

5.32 *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) şi a.î. $f(a) = f(b)$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ a.î. $f(a) - f(c) = f'(c)(c - a)$.*

R: Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $g(x) = (x - a) f(x) - x f(a)$ pe intervalul $[a, b]$.

5.33 *Fie numerele reale $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ care verifică relaţia*

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2a_1}{2} + \frac{2^2 a_2}{3} + \cdots + \frac{2^n a_n}{n+1} = 0.$$

Să se arate că funcţia $f : \left[1, e^2\right] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \cdots + a_n \ln^n x$ se anulează cel puţin într-un punct din intervalul $\left(1, e^2\right)$.

R: Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $g(x) = a_0 \ln x + \dfrac{a_1 \ln^2 x}{2} + \cdots + \dfrac{a_n \ln^{n+1} x}{n+1}$.

5.34 *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Să sea arate că există $c \in (a, b)$ aî.*

$$f'(c) = \frac{a+b-2c}{(c-a)(c-b)}.$$

R: Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $g(x) = e^{f(x)}(x-a)(x-b)$ pe intervalul $[a, b]$.

5.35 *Se consideră funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, definită prin:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0], \\ px^2 + 4x + 4, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Să se determine $m, n, p \in \mathbf{R}$ a.î. f să satisfacă ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$ şi să se găsească valoarea constantei c în acest caz.

R: $n = 4$, $m = 4$, $p = -7$, $c = \dfrac{2}{7}$.

5.36 *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) şi cu $f(a) = f(b)$. Să se arate că ecuaţia $f(x) g'(x) + f'(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul (a, b).*

R: Fie $h\,[a, b] \to \mathbf{R}$, definită prin $h(x) = f(x) e^{g(x)}$, care este o funcţie Rolle. Există deci $c \in (a, b)$ a.î. $h'(c) = 0$. Dar $h'(x) = f'(x) e^{g(x)} + f(x) g'(x) e^{g(x)}$.

5.37 *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie de trei ori derivabilă pe $[a, b]$ a.î. $f(a) = f(b) = 0$ şi $f'(a) = f'(b) = 0$. Să se arate că există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ a.î. $f'''(c) = 0$.*

R: Aplicăm teorema lui Rolle. Există $d \in (a, b)$ a.î. $f'(d) = 0$. Există apoi $c_1 \in (a, d)$ şi $c_2 \in (d, b)$ a.î. $f''(c_1) = 0$ şi $\acute{f}''(c_2) = 0$. Deci există $c \in (c_1, c_2)$ a.î. $f'''(c) = 0$.

5.38 *Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcţia $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 + ax}$, $a > 0$, şi în caz afirmativ să se determine constanta c corespunzătoare.*

R: Da, $c = \dfrac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + a}\right) \in (0, 1)$.

5.39 *Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcţiilor f, definite prin:*

$$1)\ f(x)=\begin{cases} x, & x\in[1,2], \\ \dfrac{x^2}{4}+1, & x\in(2,3]. \end{cases} \qquad 2)\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1], \\ 2x-1, & x\in(1,2]. \end{cases}$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1}, & x\in(0,3], \\ \dfrac{x}{2}+1, & x\in[-4,0]. \end{cases} \qquad 4)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & x\in[0,1], \\ \dfrac{1}{x}, & x\in(1,2]. \end{cases}$$

R: 1) Da, $f'(c)=\dfrac{9}{8}$, $c=\dfrac{9}{4}$. 2) Da, $c=\dfrac{3}{4}$. 3) Da, $c=\dfrac{13}{36}$. 4) Da, $c_1=\dfrac{1}{2}$, $c_2=\sqrt{2}$.

5.40 *Să se determine abscisa c a unui punct în care tangenta la graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, & x\le 0, \\ \sqrt{x+1}, & x>0, \end{cases}$$

este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise $x_1=-4$ şi $x_2=3$.

R: $c=\dfrac{13}{36}$.

5.41 *Să se arate că $\sqrt[3]{30}-3<\dfrac{1}{9}$.*

R: Se aplică teorema lui Lagrange funcţiei $f:[27,30]\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

5.42 *Să se găsească soluţiile reale ale ecuaţiei $(a-1)^x+(a+3)^x=a^x+(a+2)^x$, cu $a>1$.*

R: Ecuaţia se mai scrie: $a^x-(a-1)^x=(a+3)^x-(a+2)^x$. Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(t)=t^x$, pentru x$\in\mathbf{R}$, fixat. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele $[a-1,a]$ şi $[a+2,a+3]$. Există deci $c_1\in(a-1,a)$ şi $c_2\in(a+2,a+3)$ a.î. $f(a)-f(a-1)=f'(c_1)$ şi $f(a+3)-f(a+2)=f'(c_2)$. Din $f'(c_1)=f'(c_2)$ cu $c_1\ne c_2$, rezultă $x_1=0$, $x_2=1$.

5.43 *Fie f o funcţie de două ori derivabilă într-o vecinătate V a punctului $a\in\mathbf{R}$. Să se arate că pentru orice h suficient de mic există punctele $p,q\in V$ a.î.*

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(p), \quad \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(q).$$

5.44 *Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Cauchy pentru funcţiile f şi g, definite prin:*

1) $f,g:[1,e]\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln x,\ g(x)=\dfrac{e}{x}$.

2) $f,g:[-2,5]\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+3}, & x\in[-2,1), \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{4}, & x\in[1,5], \end{cases} \quad g(x)=x.$

3) $f,g:[0,3]\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+1, & x\in[1,3], \\ -x+\dfrac{4}{3}, & x\in[0,1], \end{cases} \quad g(x)=x.$

R: 1) Da, $c = \dfrac{e}{e-1}$. 2) Da, $c = \dfrac{1}{16}$. 3) Da, $c = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + 1$.

5.45 *Să se calculeze, utilizând regula lui l′Hospital:*

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}. \qquad 2)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}. \qquad 3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}.$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}},\ a > 0. \qquad 5)\ \lim_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right). \qquad 6)\ \lim_{x\to 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

$$7)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right). \quad 8)\ \lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln \frac{1+x}{x}\right). \quad 9)\ \lim_{x\to 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

R: 1) 2. 2) -2. 3) 1. 4) 0. 5) 0. 6) $-\dfrac{1}{2}$. 7) Putem scrie:

$$\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

şi se aplică de patru ori regula lui l′Hospital. Se obţine $\dfrac{2}{3}$. 8) Luăm $x = \dfrac{1}{t}$, cu $t \to 0$ pentru $x \to \infty$. Se obţine $\dfrac{1}{2}$. 9) $\dfrac{1}{e}$.

5.46 *Să se calculeze, utilizând regula lui l′Hospital:*

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x \sin x}{x - \sin x}. \quad 2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x\,[\ln x - \ln(x+1)] + 1}{ex\,[\ln(ex+1) - \ln x] - 1}.$$

R: 1) 5. 2) $-e$.

5.47 *Să se dezvolte polinomul* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ *după puterile binomului* $x - 2$.

R: $f(x) = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$.

5.48 *Să se determine o funcţie polinomială de gradul trei a.î.* $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ *şi* $f'''(0) = 6$.

R: Polinomul Taylor al funcţiei f este $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

5.49 *Să se găsească primii* 5 *termeni din dezvoltarea Taylor a funcţiei* $f(x) = e^x$ *după puterile binomului* $x + 1$.

R: $P_4(x) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e}(x+1) + \dfrac{1}{2e}(x+1)^2 + \dfrac{1}{6e}(x+1)^3 + \dfrac{1}{24e}(x+1)^4$.

5.50 *Să se găsească primii* 5 *termeni din dezvoltarea Taylor a funcţiei* $f(x) = \ln x$ *după puterile binomului* $x - 1$.

R: $P_4(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3 - \dfrac{1}{4}(x-1)^4.$

5.51 *Să se evalueze eroarea comisă în aproximarea:*

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

R: Avem că: $e^x = 1 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + R_4(x)$, unde $R_4(x) = \dfrac{x^5}{5!}e^{\theta x}$, cu $\theta \in (0,1)$. Pentru $x = 1$, $|R_4(1)| \leq \dfrac{3}{5!} = \dfrac{1}{40}$.

5.52 *Să se scrie formula Mac-Laurin de ordinul n pentru funcţiile:*

1) $f(x) = e^x,\ x \in \mathbf{R}$. 2) $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbf{R}$.
3) $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbf{R}$. 4) $f(x) = \ln(1+x),\ x \in (-1,\infty)$.
5) $f(x) = (1+x)^\alpha,$ $x \in (-1,\infty),\ \alpha \in \mathbf{R}$.

R: Avem dezvoltările:

1) $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$.

2) $\sin x = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x)$.

3) $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x)$.

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$.

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n+1}$, cu $\theta \in (0,1)$.

5.53 *Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel ca polinomul Taylor de gradul n în punctul $x_0 = 0$ asociat funcţiei $f(x) = e^x$ să aproximeze funcţia pe intervalul $[-1,1]$ cu trei zecimale exacte.*

R: Avem

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} < \frac{1}{1000},\ |x| \leq 1.$$

Dar cum $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$ şi deci $|R_n(x)| < \dfrac{3}{(n+1)!} < \dfrac{1}{1000}$ pentru $n \geq 6$.

5.54 *Să se scrie formula Mac-Laurin de ordinul n pentru funcţia $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$, $x > -a$.*

R: Funcţia se mai scrie: $f(x) = \sqrt{a}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$. Se obţine:

$$f(x) = \sqrt{a}\left[1 + \frac{x}{2a} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3)}{k! \cdot 2^k} \left(\frac{x}{a}\right)^k + R_n(x)\right].$$

5.55 *Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel ca valorile polinomului Taylor de gradul n în punctul $x_0 = 0$ asociat funcţiei $f(x) = \sqrt{1+x}$, pe intervalul $[0,1]$, să nu difere de $f(x)$ cu mai mult de $\frac{1}{16}$.*

R: Avem

$$|R_n(x)| = \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \left| \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} < \frac{1}{16}.$$

Se obţine $n \geq 2$.

5.56 *Utilizând formula Mac-Laurin să se calculeze următoarele limite:*

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - \sin^2 x - 2}{x^4}. \quad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3}.$$

$$3)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}. \quad 4)\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cdot \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}.$$

$$5)\ \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

R: 1) $\frac{1}{12}$. 2) 4. 3) $\cos a$. 4) $\frac{1}{3}$. 5) $-\frac{1}{12}$.

5.3 Derivatele şi diferenţiala funcţiilor de n variabile

5.57 *Utilizând definiţia, să se calculeze derivatele parţiale ale următoarelor funcţii, în punctele specificate:*

1) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 2y^3$ *în* $(1,1)$. 2) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ *în* $(1,1)$.

3) $f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$ *în* $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$. 4) $f(x,y) = \ln\left(1 + x + y^2\right)$ *în* $(1,1)$.

5) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ *în* $(2,1)$. 6) $f(x,y) = \ln\left(x - y^2\right)$ *în* $(4,1)$.

R: Se obţine:

1) $f'_x(1,1) = -3$, $f'_y(1,1) = 3$. 2) $f'_x(1,1) = \frac{1}{2}$, $f'_y(1,1) = -\frac{1}{2}$.

3) $f'_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $f'_y\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = 0$. 4) $f'_x(1,1) = \frac{1}{3}$, $f'_y(1,1) = \frac{2}{3}$.

5) $f'_x(2,1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $f'_y(2,1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. 6) $f'_x(4,1) = \frac{1}{3}$, $f'_y(4,1) = -\frac{2}{3}$.

5.58 *Să se calculeze derivatele parţiale ale următoarelor funcţii:*

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$. 2) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.

3) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$. 4) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5) $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$. 6) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

7) $f(x,y) = e^{\sin\frac{y}{x}}$. 8) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

R: Se obţine:
1) $f'_x(x,y) = 3x^2 - 3ay,\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 3ax$.
2) $f'_x(x,y) = \dfrac{2y}{(x+y)^2},\ f'_y(x,y) = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$.
3) $f'_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},\ f'_y(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.
4) $f'_x(x,y) = \dfrac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\ f'_y(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.
5) $f'_x(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$.
6) $f'_x(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2},\ f'_y(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.
7) $f'_x(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\dfrac{y}{x},\ f'_y(x,y) = \dfrac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\dfrac{y}{x}$.
8) $f'_x(x,y) = \dfrac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}},\ f'_y(x,y) = -\dfrac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

5.59 *Să e calculeze derivatele parţiale ale următoarelor funcţii:*

1) $f(x,y) = y^{\frac{y}{x}}\sin\dfrac{y}{x}$. 2) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

3) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$. 4) $f(x,y) = xy\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

5) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 6) $f(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}} - e^{-\frac{z}{y}}$.

7) $f(x,y,z) = e^{xyz}\cos\dfrac{y}{xz}$. 8) $f(x,y,z) = (\sin x)^{yz}$.

5.60 *Să e calculeze derivatele parţiale ale următoarelor funcţii:*

1) $f(x,y) = \ln\left[xy^2 + x^2y\right] + \sqrt{1 + (xy^2 + x^2y)^2}$.

2) $f(x,y) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$.

5.61 *Să se calculeze, utilizând definiţia, următoarele derivate parţiale de ordinul doi:*

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1)$, *dacă* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. 2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2)$, *dacă* $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$.

3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, *dacă* $f(x,y) = x\sin(x+y)$. 4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$, *dacă* $f(x,y) = xy\ln x$.

R: 1) Deoarece

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = \lim_{y\to 1} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{y-1},$$

se obţine $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. 2) $\dfrac{1}{9}$. 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$. 4) 1.

5.62 *Să e calculeze derivatele parţiale ale următoarelor funcţii:*

1) $f(x,y,z) = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$. 2) $f(x,y,z) = (xy)^z$.
3) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 4) $f(x,y,z) = z^{xy}$.

R: Se obţine:
1) $f'_x(x,y,z) = 3x^2y^2z + 2$, $f'_y(x,y,z) = 2x^3yz - 3$, $f'_z(x,y,z) = x^3y^2 + 1$.
2) $f'_x(x,y,z) = \dfrac{z}{x}(xy)^z$, $f'_y(x,y,z) = \dfrac{z}{y}(xy)^z$, $f'_z(x,y,z) = (xy)^z\ln(xy)$.
3) $f'_x(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $f'_y(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
$f'_z(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
4) $f'_x(x,y,z) = y\, z^{xy}\ln z$, $f'_y(x,y,z) = xz^{xy}\ln z$, $f'_z(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}z^{xy}$.

5.63 *Să se arate că următoarele funcţii sunt omogene şi apoi să se verifice relaţia lui Euler:*

1) $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. 2) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.
3) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. 4) $f(x,y) = \left(x^2-y^2\right)\ln\dfrac{x-y}{x+y}$.
5) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{y}{x}$. 6) $f(x,y) = \left(x^2-y^2\right)e^{\frac{y}{x}}$.

5.64 *Să se arate că dacă* $u = f(x,y,z)$ *este o funcţie omogenă de grad de omogenitate* m*, care admite derivate parţiale de ordinul doi continue pe* $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^3$*, atunci:*

$$1)\ x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = (m-1)\frac{\partial f}{\partial x}.$$

$$2)\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2zx\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = m(m-1)f.$$

5.65 *Să se arate că funcţiile date mai jos satisfac egalităţile scrise în dreptul lor:*

$$1)\ z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right),\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

$$2)\ z=xy+xe^{\frac{y}{x}},\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z.$$

$$3)\ u=(x-y)(y-z)(z-x),\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

$$4)\ u=x+\frac{x-y}{y-z},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1.$$

$$5)\ u=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right),\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}.$$

5.66 *Se dăa funcţia:*

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

Să se arate că deşi nu sunt satisfăcute ipotezele teoremei lui Schwarz, totuşi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

R: Să observăm că teorema lui Schwarz dă condiţii suficiente nu şi necesare pentru egalitatea derivatelor mixte.

Deoarece pentru $x>1$, $\ln x>x$, avem

$$0<y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)=2y^2\ln\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}<2y^2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=2|y|\sqrt{x^2+y^2},$$

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(x,y)=0$, apoi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} 2y\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right)-\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

şi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=0.\end{aligned}$$

Dar
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$
nu este continuă în origine.

5.67 *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiilor:*

1) $f(x,y)=2x^2-3xy-y^2$. 2) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$.
3) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y\right)$. 4) $f(x,y)=\sqrt{2xy+y^2}$.
5) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$. 6) $f(x,y)=(\arcsin xy)^2$.
7) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 8) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$.

5.68 *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi, în origine, ale funcţiei:*
$$f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n.$$

R: $f_{xx}(0,0)=m(m-1),\ f_{xy}(0,0)=mn,\ f_{yy}(0,0)=n(n-1)$.

5.69 *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul $m+n$:*
$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial^m \partial x^n}(x,y),\ \textit{dacă: } 1)\ f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}.\ \ 2)\ f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{x+y}.$$

R: 1) Prin inducţie după n şi apoi după m, se obţine:
$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial x^n}(x,y)=(-1)^n\cdot 2\,(m+n-1)!\cdot\frac{mx+ny}{(x-y)^{m+n+1}}.$$

2) Se obţine:
$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial x^n}(x,y)=\left[x^2+y^2+2\,(mx+ny)+m\,(m-1)+n\,(n-1)\right]e^{x+y}.$$

5.70 *Să se arate că funcţiile:*
$$1)\ u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \ 2)\ u=\ln\frac{1}{r},\ \textit{unde } r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$
satisfac ecuaţia lui Laplace:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

5.71 *Să se arate că funcţia $u=A\sin(a\lambda t+\varphi)\sin\lambda x$ satisface ecuaţia undelor:*
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

5.72 *Să se arate că funcţia*

$$u = \frac{1}{\left(\sqrt{\pi t}\right)^3} \cdot e^{-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{t}}$$

satisface ecuaţia căldurii:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

5.73 *Se dă funcţia $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$. Să se găsească variaţia şi diferenţiala funcţiei în punctul (x_0, y_0).*

R: Variaţia funcţiei este:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [(2x_0 + y_0)\cdot h + (x_0 - 2y_0)\cdot k] + \left(h^2 + hk - k^2\right).$$

Deci diferenţiala este $df(x_0,y_0) = (2x_0 + y_0)\cdot h + (x_0 - 2y_0)\cdot k$.

5.74 *Se dă funcătia $f(x,y) = x^2 y$. Să se calculeze variaţia şi diferenţiala funcţiei în punctul $(x_0,y_0) = (1,2)$, pentru: 1) $(h,k) = (1,2)$, 2) $(h,k) = (0,1;0,2)$.*

5.75 *Utilizând definiţia, să se arate că următoarele funcţii sunt diferenţiabile în punctule specificate:*

1) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ *în* $(1,1)$. 2) $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$ *în* $(1,1)$.
3) $f(x,y) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *în* $(3,4,5)$. 4) $f(x,y) = \ln\left(x^3 + y^3\right)$ *în* $(0,1)$.

R: 1) Pentru orice $(h,k) \in \mathbf{R}^2$, avem

$$f(1+h, 1+k) - f(1,1) = 2k + \left(h^2 + k^2\right) = 2k + \alpha(k,h)\cdot\sqrt{h^2+k^2},$$

cu $\alpha(k,h) = \sqrt{h^2+k^2} \to 0$, pentru $(k,h) \to (0,0)$, iar $df(1,1) = 2k$.

5.76 *Să se arate că în origine, funcţia*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

este continuă, admite derivate parţiale, însă nu este diferenţiabilă.

R: Din

$$0 < \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{|xy|}{\sqrt{y^2}} = |x|,$$

deducem că f este continuă în origine. Utilizând definiţia se arată că funcţia are derivate parţiale în origine egale cu 0.

Să arătăm că funcţia nu este diferenţiabilă în origine. Dacă ar fi diferenţiabilă în origine, ar avea loc egalitatea:

$$f(x,y) - 0 = 0(x-0) + 0(y-0) + \alpha(x,y) \cdot \sqrt{x^2+y^2},$$

în care $\alpha(x,y)$ să aibă limită în origine egală cu 0. Dar din egalitatea precedentă rezultă $\alpha(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, funcţie care nu are limită în origine.

5.77 *Să se cerceteze dacă funcţia* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *este diferenţiabilă în origine.*

R: Funcţia nu admite derivate parţiale în origine, deci nu este diferenţiabilă în origine.

5.78 *Să se calculeze diferenţialele funcţiilor:*

$$\begin{array}{ll} 1)\ f(x,y) = x^3+y^3-3xy. & 2)\ f(x,y) = x^2y^3. \\ 3)\ f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}. & 4)\ f(x,y) = \sin^2 x + \sin^2 y. \\ 5)\ f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right). & 6)\ f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}. \end{array}$$

R: 1) $df(x,y) = \left(3x^2-3y\right) dx + \left(3y^2-3x\right) dy.$

5.79 *Să se calculeze diferenţialele funcţiilor:*

$$\begin{array}{ll} 1)\ f(x,y,z) = xyz. & 2)\ f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \\ 3)\ f(x,y,z) = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{z^2}. & 4)\ f(x,y,z) = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z. \end{array}$$

R: $df(x,y,z) = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz.$

5.80 *Să se găsească cu cât se modifică (aproximativ) volumul unui con având raza bazei* $x = 10\,cm$ *şi înălţimea* $y = 30\,cm$ *dacă raza se micşorează cu* $1\,mm$*, iar înălţimea creşte cu* $3\,mm$.

R: Volumul conului este $V = \dfrac{\pi}{3}x^2y$. Variaţia volumului este dată de:

$$V - V_0 \approx dV = \frac{\pi}{3}\left(2xy\,dx + x^2\,dy\right) = \frac{\pi}{3}(-600\cdot 0,1 + 100\cdot 0,3) = -10\pi\,cm^3.$$

5.81 *Să se calculeze aproximativ* $(1,02)^{3,01}$.

R: Considerăm funcţia $z = x^y$. Luăm $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $h = 0,02$ şi $k = 0,01$. Putem scrie:

$$z - z_0 \approx dz = x_0^{y_0-1} y_0 \cdot h + x_0^{y_0} \ln x_0 \cdot k = 3\cdot 0,02 + 0\cdot 0,01 = 0,06.$$

Deci $z \approx 1 + 0,06 = 1,06$.

5.82 *Să se calculeze diferenţialele de ordinul doi ale funcţiilor:*

$$\begin{array}{lll} 1)\ f(x,y) = \cos xy. & 2)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}. & 3)\ f(x,y) = e^{xy}. \\ 4)\ f(x,y) = \ln xy. & 5)\ f(x,y,z) = xyz. & 6)\ f(x,y,z) = e^x \sin yz. \end{array}$$

R: 1) $d^2 f(x,y) = -\left(y^2\,dx^2 + 2xy\,dxdy + x^2\,dy^2\right)\cos xy.$

5.83 *Să se calculeze diferenţiala de ordinul doi a funcţiei* $f(x,y,z) = \sin(x - 2y + z)$.

5.84 *Să se calculeze diferenţiala de ordinul* n *a funcţiei* $f(x,y) = e^{ax+by}$.

R: Se obţine: $d^n f(x,y) = e^{ax+by}\,(a\,dx + b\,dy)^n$.

5.85 *Aplicând formula de derivare a funcţiilor compuse, să se calculeze* $F'(x_0)$*, ştiind că* $F(x) = f(u(x), v(x))$ *in care:*

$$1)\ f(u,v) = u + uv,\ \ u(x) = \cos x,\ v(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}.$$
$$2)\ f(u,v) = e^{u-2v},\ \ u(x) = x^2,\ v(x) = x^2 - 2,\ x_0 = 2.$$

5.86 *Să se găsească* $\dfrac{dz}{dt}$ *dacă:*

$$1)\ z = e^{3x+2y},\ \textit{unde: } x = \cos t,\ y = t^2.$$
$$2)\ z = \frac{x}{y},\ \textit{unde: } x = e^t,\ y = \ln t.$$
$$3)\ z = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}},\ \textit{unde: } x = 3t^2,\ y = \sqrt{t^2+1}.$$

5.87 *Să se găsească* $\dfrac{dz}{dt}$ *dacă:*

1) $z = e^{x^2+y^2}$, *unde:* $x = a\cos t,\ y = a\sin t$. 2) $z = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{y}$, *unde:* $x = \operatorname{tg}^2 t,\ y = \operatorname{ctg}^2 t$.

5.88 *Să se găsească* $\dfrac{du}{dt}$ *dacă:*

$$1)\ u = xyz,\ \textit{unde: } x = t^2 + 1,\ y = \ln t,\ z = \operatorname{tg} t.$$
$$2)\ u = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \textit{unde: } x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = H.$$

5.89 *Să se găsească* $\dfrac{dz}{dx}$ *dacă* $z = u^v$*, unde* $u = \sin x,\ v = \cos x$.

5.90 *Să se găsească* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *şi* $\dfrac{dz}{dx}$ *dacă* $z = x^y$*, unde* $y = \varphi(x)$.

5.91 *Să se găsească* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *şi* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$*, dacă* $z = f(u,v)$*, unde* $u = x^2 + y^2$ *şi* $v = e^{xy}$.

5.92 *Să se găsească* $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ *şi* $\dfrac{\partial z}{\partial v}$*, dacă* $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$*, unde* $x = u\sin v$ *şi* $y = u\cos v$.

5.93 *Să se găsească* $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ *şi* $\dfrac{\partial z}{\partial v}$*, dacă* $z = f(u)$*, unde* $u = xy + \dfrac{y}{x}$.

5.94 *Să se arate că dacă* $\omega = f\left(x^2+y^2+z^2\right)$, *unde:*

$$x = R\cos u\cos v,\quad y = R\cos u\sin v,\quad z = R\sin u,$$

atunci: $\dfrac{\partial\omega}{\partial u} = 0$ *şi* $\dfrac{\partial\omega}{\partial v} = 0.$

5.95 *Să se arate că dacă* $z = f(x+ay)$, *unde* f *este o funcţie diferenţiabilă, atunci*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x}.$$

5.96 *Să se arate că funcţia* $w = f(u,v)$, *unde* f *este o funcţie diferenţiabilă şi* $u = x+at$, $v = y+bt$, *satisface ecuaţia:*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}.$$

5.97 *Să se arate că funcţia* $z = yf\left(x^2-y^2\right)$, *unde* f *este o funcţie diferenţiabilă, satisface ecuaţia:*

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

5.98 *Să se arate că funcţia* $z = xy + f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, *unde* f *este o funcţie diferenţiabilă, satisface ecuaţia:*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

5.99 *Să se arate că funcţia* $z = e^y f\left(ye^{\dfrac{x^2}{2y^2}}\right)$, *unde* f *este o funcţie diferenţiabilă, satisface ecuaţia:*

$$\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

5.100 *Să se arate că funcţia* $z = xf\left(\dfrac{y}{x}\right) + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, *unde* f *şi* g *sunt o funcţii de două ori diferenţiabile, satisface ecuaţia:*

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

5.101 *Să se arate că funcţia* $z = f(xy) + \sqrt{xy}\cdot g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, *unde* f *şi* g *sunt o funcţii de două ori diferenţiabile, satisface ecuaţia:*

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

5.102 *Să se arate că funcţia* $z = f(x + g(y))$ *satisface ecuaţia:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5.103 *Să se găsească* $d^2 z$ *dacă:*

1) $z = f(u)$, *unde* $u = x^2 + y^2$. 2) $z = u^v$, *unde* $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$.
3) $z = f(u, v)$, *unde* $u = ax$ *şi* $v = ay$. 4) $z = f(u, v)$, *unde* $u = xe^y$ *şi* $v = ye^x$.

5.104 *Să se calculeze diferenţialele de ordinul doi ale funcţiilor compuse:*

$$1)\ F(x) = f\left(x^2, \ln x\right).\ 2)\ F(x, y) = f\left(x^2, \frac{x}{y}\right).$$

$$3)\ F(x, y, z) = f\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right).$$

5.105 *Să se găsească polinomul Taylor de gradul* 3 *asociat funcţiei*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

în punctul $(1, 1)$.

R:Polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcţiei f este:

$$T_3(x, y) = \sqrt{2} + \frac{1}{1!}\frac{1}{\sqrt{2}}[(x-1) + (y-1)] + \frac{1}{2!}\frac{1}{2\sqrt{2}}[(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2] -$$

$$-\frac{1}{3!}\frac{1}{4\sqrt{2}}[(x-1)^3 - (x-1)^2(y-1) - (x-1)(y-1)^2 + (y-1)^3].$$

5.106 *Să se găsească polinomul Taylor de gradul* n *asociat funcţiei* $f(x, y) = e^{x+y}$ *în punctul* $(1, -1)$.

R: Avem:

$$T_n(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}[(x-1) + (y+1)]^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!}(x-1)^{k-i}(y+1)^i.$$

5.107 *Să se găsească o valoare aproximativă a numărului* $(1,1)^{1,2}$.

R: Polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcţiei $f(x, y) = x^y$, $x > 0$, $y > 0$, în punctul $(1, 1)$ este:

$$T_3(x, y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)].$$

Putem atunci scrie $f(1,1; 1,2) \approx T_3(1,1; 1,2) = 1,1021$.

5.108 *Să se dezvolte polinomul*

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$$

după formula lui Taylor în vecinătatea punctului $(1,2)$.

R: Avem:

$$f(x,y) = 9(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2 +$$
$$+ (x-1)^3 - 2(y-2)^3.$$

5.109 *Să se dezvolte polinomul*

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

după formula lui Taylor în vecinătatea punctului $(-2,1)$.

R: $f(x,y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$.

5.110 *Să se dezvolte polinomul* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ *după formula lui Taylor în vecinătatea punctului* $(1,1,1)$.

5.111 *Se dă polinomul* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$. *Să se dezvolte* $f(x+k, y+h, z+\ell)$ *după formula lui Taylor în vecinătatea punctului* (x,y,z).

5.112 *Să se găsească polinoamele Taylor de gradul* 3 *asociate, în origine, funcţiilor:*

$$1)\ f(x,y) = e^x \sin y. \quad 2)\ f(x,y) = \cos x \cos y.$$

R: 1) $T_3(x,y) = y + xy - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}x^2 y$. 2) $T_3(x,y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2$.

5.113 *Să se găsească polinoamele Taylor de gradul* 2 *asociat funcţiei*

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

în punctul $(1,1)$.

R: Avem

$$T_3(x,y) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{1!}\left[(x-1) + (y-1)\right] + \frac{1}{2!}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2\right].$$

5.114 *Să se deducă formule aproximative (exacte până la termeni de gradul doi în* x *şi* y*) pentru funcţiile:*

$$1)\ f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1-y}, \quad 2)\ f(x,y) = \sqrt{\frac{(1+x)^m + (1+y)^n}{2}},$$

dacă $|x|$ *şi* $|y|$ *sunt mici în comparaţie cu unitatea.*

Capitolul 6

Funcţii definite implicit

6.1 Funcţii definite implicit de o ecuaţie

6.1 *Să se arate că ecuaţia* $F(x;y) = y^3 - xy^2 - xy + x^2 = 0$*:*

1) *Admite o infinitate de soluţii* $y = f(x)$, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$.

2) *Admite numai patru soluţii continue* $y = f(x)$, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$.

3) *Există o vecinătate* U *a punctului* $x_0 = 4$ *şi o vecinătate* V *a punctului* $y_0 = 2$*, în care ecuaţia* $F(x;y) = 0$ *admite o singură soluţie* $y = f(x)$, $f : U \to V$*, continuă pe* U*, care satisface condiţia* $f(4) = 2$.

R: 1) Ecuaţia se mai scrie: $(y - x)\left(y^2 - x\right) = 0$. Deci, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, cu $0 \leq \alpha \leq \beta$, funcţiile $y = f(x)$, $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [\alpha,\beta), \\ \sqrt{x}, & \text{în rest,} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [\alpha,\beta), \\ x, & \text{în rest.} \end{cases}$$

2) Cele patru soluţii continue pe $[0,\infty)$ sunt:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \sqrt{x},\ f_3(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ \sqrt{x}, & x \in [1,\infty), \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0,1), \\ x, & x \in [1,\infty). \end{cases}$$

3) Deoarece $F'_y(4;2) = -8 \neq 0$, dacă luăm $U = (1,\infty)$ şi $V = (1,\infty)$, funcţia $f(x) = \sqrt{x}$ este continuă şi $f(4) = 2$.

6.2 *Să se arate că ecuaţia* $F(x,y;z) = x^2 + y^2 - z^2 - 3xyz = 0$ *admite numai două soluţii* $z = z_1(x,y)$ *şi* $z = z_2(x,y)$ *continue şi diferenţiabile pe o vecinătate a punctului* $(0,1)$.

R: Ecuaţia $F(0,1;z) = 1 - z^2 = 0$ are rădăcinile $z_1 = 1$ şi $z_2 = -1$, iar $F'_z(x,y;z) = -(2z + 3xy)$, a.î. $F'_z(0,1;1) = -2$, $F'_z(0,1;-1) = 2$. Deci există două funcţii continue şi diferenţiabile pe o vecinătate a punctului $(0,1)$ care satisfac condiţiile $z_1(0,1) = 1$ şi respectiv $z_2(0,1) = -1$. Derivatele lor parţiale sunt date de:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 3yz}{2z + 3xy},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - 3xz}{2z + 3xy}.$$

Valorile lor în punctul $(0,1)$ sunt:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}(0,1)=-\frac{3}{2},\quad \frac{\partial z_1}{\partial y}(0,1)=1,\quad \frac{\partial z_2}{\partial x}(0,1)=-\frac{3}{2},\quad \frac{\partial z_2}{\partial y}(0,1)=-1.$$

6.3 *Să se calculeze* $\dfrac{dy}{dx}$ *şi* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *dacă*

$$\begin{array}{l} 1)\ F(x;y)=\left(x^2+y^2\right)^3-3\left(x^2+y^2\right)+1=0. \\ 2)\ F(x;y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-a\,\mathrm{acrtg}\,\dfrac{y}{x}=0,\quad a\neq 0. \\ 3)\ F(x;y)=x^2+y^2+\ln\left(x^2+y^2\right)-a^2=0. \end{array}$$

R: 1) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ şi $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{x^2+y^2}{y^3}$. 2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+ay}{ax-y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(a^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)}{(ax-y)^3}$.
3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{x^2+y^2}{y^3}$.

6.4 *Să se calculeze* $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *şi* $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ *dacă*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

R: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$ şi $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$.

6.5 *Să se calculeze* $\dfrac{dy}{dx}$ *dacă* $F(x;y)=y^x-y+1=0$.

R: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^x\ln x}{1-xy^{x-1}}$.

6.6 *Ecuaţiile:*

$$\begin{array}{l} 1)\ F(x,y;z)=x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0, \\ 2)\ F(x,y;z)=x\cos y+y\cos x+z\cos x-1=0, \\ 3)\ F(x,y;z)=x+y+z-e^z=0, \\ 4)\ F(x,y;z)=z^2-xe^y-ye^z-ze^x=0, \end{array}$$

definesc funcţii $z=z(x,y)$. *Să se calculeze:* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *şi* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

R: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2-yz}{xy-z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6y^2-3xz-2}{3\left(xy-z^2\right)}$.
2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z\cos x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$.
3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{e^z-1}$. 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^y+ze^x}{2z-ye^z-e^x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xe^y+e^z}{2z-ye^z-e^x}$.

6.7 *Ecuaţiile:*

$$1)\ xe^y + ye^x + ze^x = 1,\ \ 2)\ x - z + \operatorname{arctg}\frac{y}{z-x} = 0,\ \ 3)\ \sin xy - e^{xy} - x^2y = 0.$$

definesc funcţii $z = z(x,y)$*. Să se calculeze* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

R: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -y - z - e^{y-x}$. 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$. 3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y\left(e^{xy}+2x-\cos xy\right)}{x\left(e^{xy}+x-\cos xy\right)}$.

6.8 *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi cele de ordinul al doilea ale funcţiei* $z = z(x,y)$ *definită de ecuaţia*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{c^2x}{a^2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{c^2y}{b^2z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{c^4\left(b^2-y^2\right)}{a^2b^2z^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{c^4\left(a^2-x^2\right)}{a^2b^2z^3}$.

6.9 *Să se calculeze* dz *şi* d^2z *dacă funcţia* $z = z(x,y)$ *este definită de ecuaţia:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

R: $dz = -\dfrac{x}{z}\,dx - \dfrac{y}{x}\,dy$, $d^2z = \dfrac{y^2-a^2}{z^3}\,dx^2 - 2\dfrac{xy}{z^3}\,dxdy + \dfrac{x^2-a^2}{z^3}\,dy^2$.

6.10 *Să se calculeze* dz *şi* d^2z *în punctul* $(2,0;1)$ *dacă funcţia* $z = z(x,y)$ *este definită de ecuaţia:*

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

R: $dz(2,0) = 0$, $\mathrm{d}^2z(2,0) = \dfrac{4}{15}\left(dx^2 + dy^2\right)$.

6.11 *Funcţia* $z = z(x,y)$ *este definită de ecuaţia* $(y+z)\sin z - y(x+z) = 0$*. Să se arate că*

$$z\sin z\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

R: Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sin z + y\cos z + z\cos z - y},\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin z - x - z}{\sin z + y\cos z + z\cos z - y}.$$

6.12 *Funcţia* $z = z(x,y)$ *este definită de ecuaţia* $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$*, unde* φ *este o funcţie derivabilă şi* a, b, c *sunt constante. Să se arate că*

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

6.13 *Funcţia $z = z(x, y)$ este definită de ecuaţia $F(x - az, y - bz) = 0$, unde F este o funcţie diferenţiabilă iar a şi b sunt constante. Să se arate că*

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

6.14 *Ecuaţia $F(x + 2y, y - 2x) = 0$ defineşte funcţia $y = y(x)$. Să se calculeze $y'(x)$ şi $y''(x)$.*

6.15 *Ecuaţia $F(\sin x + y, \cos y + x) = 0$ defineşte funcţia $y = y(x)$. Să se calculeze $y'(x)$ şi $y''(x)$.*

6.16 *Ecuaţia*

$$\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \arcsin(ax + by + cz) = 1$$

defineşte funcţia $z = z(x, y)$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6.17 *Ecuaţia $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ defineşte funcţia $z = z(x, y)$. Să se arate că:*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

6.18 *Ecuaţia $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ defineşte funcţia $z = z(x, y)$. Să se arate că:*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6.2 Funcţii definite implicit de un sistem de ecuaţii

6.19 *Sistemul*

$$\begin{cases} F(x; y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ G(x; y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 5 = 0, \end{cases}$$

defineşte funcţiile $y = y(x)$, $z = z(x)$. Să se calculeze $y'(x)$, $z'(x)$, $y''(x)$ şi $z''(x)$.

R: Din sistemul: $x + yy' - zz' = 0$, $x + 2yy' + 3zz' = 0$, se obţine: $y' = -\frac{4x}{5y}$, $z' = \frac{x}{5z}$. Derivând din nou şi înlocuind y' şi z', obţinem:

$$y'' = -\frac{4}{25}\frac{5y^2 + 4x^2}{y^3}, \quad z'' = -\frac{1}{25}\frac{x^2 - 5z^2}{z^3}.$$

6.20 *Sistemul*

$$\begin{cases} F(x; y, z) = \cos x + \cos y + \cos z - a = 0, \\ G(x; y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - b = 0, \end{cases}$$

defineşte funcţiile $y = y(x)$, $z = z(x)$. Să se calculeze $y'(x)$, $z'(x)$.

R: Din sistemul: $\sin x + y' \sin y - z' \sin z = 0$, $x^2 + y^2 y' + z^2 z' = 0$, obţinem:

$$y' = -\frac{x^2 \sin z - z^2 \sin x}{y^2 \sin z - z^2 \sin y}, \quad z' = -\frac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}.$$

6.21 *Sistemul $xyz = a$, $x + y + z = b$ defineşte funcţiile $y = y\,(x)$, $z = z\,(x)$. Să se calculeze dy, dz, d^2y şi d^2z.*

R: Din: $yzdx + xzdy + xydz = 0$ şi $dx + dy + dz = 0$ se obţine:

$$dy = -\frac{y\,(x-z)}{x\,(y-z)}\,dx, \quad dz = \frac{z\,(x-y)}{x\,(y-z)}\,dx,$$

$$d^2y = -d^2z = -2yz\frac{x^2 + y^2 + z^2 - xz - xy - yz}{x^2\,(y-z)^3}\,dx^2.$$

6.22 *Sistemul*

$$\begin{cases} F(x,y;u,v) = u + v - x - y = 0, \\ G(x,y;u,v) = xu + yv - 1 = 0, \end{cases}$$

pentru $x \neq y$, defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y. Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiilor $u = u(x,y)$ şi $v = v(x,y)$.

R: Pentru a calcula derivatele parţiale ale funcţiilor $u = u(x,y)$ şi $v = v(x,y)$, derivăm cele două ecuaţii în raport cu x şi apoi cu y. Se obţin sistemele liniare:

$$\begin{cases} u_x + v_x = 1, \\ xu_x + yv_x = -u, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_y + v_y = 1, \\ xu_y + yv_y = -v, \end{cases}$$

al căror determinant este

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x \neq 0.$$

Aplicând regula lui Cramer se obţine:

$$u_x = \frac{y+u}{y-x}, \quad v_x = -\frac{x+u}{y-x}, \quad u_y = \frac{y+v}{y-x}, \quad v_y = -\frac{x+v}{y-x}.$$

6.23 *Sistemul*

$$\begin{cases} F(x,y;u,v) = u - x - y = 0, \\ G(x,y;u,v) = uv - y = 0, \end{cases}$$

defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale funcţiilor $u = u(x,y)$ şi $v = v(x,y)$.

6.24 *Sistemul*

$$\begin{cases} F(x,y;u,v) = x + y + u + v - a = 0, \\ G(x,y;u,v) = x^3 + y^3 + u^3 + v^3 - b = 0, \end{cases}$$

defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale funcţiilor $u = u(x,y)$ şi $v = v(x,y)$.

R: Obţinem:

$$u_x = \frac{v^2 - x^2}{u^2 - v^2}, \quad v_x = \frac{x^2 - u^2}{u^2 - v^2}, \quad u_y = \frac{v^2 - y^2}{u^2 - v^2}, \quad v_y = \frac{y^2 - u^2}{u^2 - v^2}.$$

6.25 *Sistemul*

$$\begin{cases} F(x, y; u, v) = u + v - x = 0, \\ G(x, y; u, v) = u - yv = 0, \end{cases}$$

defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y. Să se calculeze du, dv, d^2u şi d^2v.

R: Din: $du + dv = dx$ şi $du - y\,dv = v\,dy$, se obţine:

$$du = \frac{1}{1+y}\left(y\,dx + v\,dy\right), \quad dv = \frac{1}{1+y}\left(\,dx - v\,dy\right),$$

$$d^2u = -d^2v = \frac{2}{(1+y)^2}\left(dx\,dy - v\,d^2y\right).$$

6.26 *Sistemul $\varphi(u, v) = x$, $\psi(u, v) = y$ defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y. Să se calculeze*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \; \frac{\partial v}{\partial x}, \; \frac{\partial u}{\partial y}, \; \frac{\partial v}{\partial y}.$$

R: Derivând cele două ecuaţii în raport cu x, obţinem:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Dacă $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0$, obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial v}}{\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}}.$$

6.27 *Să se găsească z_x şi z_y dacă:*

1) $x = u\cos v, \; y = u\sin v, \; z = cv.$ 2) $x = u + v, \; y = u - v, \; z = uv.$

R: 1) $z_x = cv_x = -\dfrac{cy}{x^2 + y^2}$, $z_y = cv_y = \dfrac{cx}{x^2 + y^2}$. 2) $z_x = \dfrac{1}{2}x$, $z_y = -\dfrac{1}{2}y$.

6.3 Transformări punctuale

6.28 *Fie $E = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}^2$ şi $F = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Să se arate că transformarea punctuală:*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad (r, \varphi) \in E,$$

este regulată pe E şi să se determine inversa sa în vecinătatea punctului $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right) \in E$.

R: Determinantul funcţional al transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0, \ \ \forall (r,\varphi) \in E.$$

Deci în orice punct cu excepţia originii, transformarea este regulată şi inversa ei este

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

6.29 *Fie* $E = (0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$ *şi* $F = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\,,\ z \in \mathbf{R}\}$. *Să se arate că transformarea punctuală:*

$$x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

este regulată pe E *şi să se determine inversa sa în vecinătatea punctului* $\left(1, \frac{\pi}{4}, 0\right) \in E$.

R: Determinantul funcţional al transformării este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0, \ \ \forall (r,\varphi,z) \in E.$$

Deci în orice punct cu excepţia celor de pe axa Oz este regulată şi inversa ei este

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \ \ z = z.$$

6.30 *Fie* $E = (0,\infty) \times [0,2\pi) \times (0,\pi) \subset \mathbf{R}^3$ *şi* $F = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\,,\ z \in \mathbf{R}\}$. *Să se arate că transformarea punctuală:*

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta, \quad (r,\varphi,\theta) \in E,$$

este regulată pe E *şi să se determine inversa sa în vecinătatea punctului* $\left(1, \frac{\pi}{4}, 0\right) \in E$.

R: Determinantul funcţional al transformării este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \neq 0.$$

Deci în orice punct cu excepţia celor de pe axa Oz este regulată şi inversa ei este

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \ \ \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

6.31 *Se dă transformarea punctuală* $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definită prin:*

$$u = x^2+y^2, \ \ v = x^2-y^2.$$

1) *Să se găsească imaginea mulţimii* $E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\right\}$ *prin transformarea* $\mathbf{f}$.
2) *Să se arate că transformarea* $\mathbf{f}$ *este regulată într-o vecinătate a punctului* $(1,1)$.
3) *Să se găsească inversa transformării* $\mathbf{f}$.

R: 1) $F = \left\{(u,v) \in \mathbf{R}^2\, u+v>0, u-v>0\right\}$. 2) $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}(1,1) = -8 \neq 0$. 3) Inversa transformării $\mathbf{f}$ este:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u+v}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u-v}.$$

6.32 *Să se arate că transformarea punctuală* $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definită prin:*

$$u = \sin(x+y), \quad v = y^3,$$

nu este regulată pe mulţimea $D = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

R: $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = 3y^2 \cos(x+y) = 0$ pentru $y = 0$ sau $x + y = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

6.33 *Să se arate că transformarea:*

$$x = \cos\varphi\cos\psi, \quad y = \cos\varphi\sin\psi,$$

este regulată pe mulţimea $E = \left\{(\varphi,\psi) \mid 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \psi \in \mathbf{R}\right\}$. *Să se calculeze:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

în punctul $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, *imaginea prin transformarea dată a punctului* $(\varphi_0, \psi_0) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

R: Determinantul funcţional al transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix} = -2\sin\varphi\cos\varphi \neq 0, \quad \forall(\varphi,\psi) \in E.$$

Inversa transformării este: $\varphi = \arccos\sqrt{x^2+y^2}$, $\psi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, iar:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -1.$$

6.34 *Fie transformarea:* $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$, $(r,\varphi,\psi) \in \mathbf{R}^3$.

1) *Să se determine punctele în care transformarea este regulată.*

2) *Să se calculeze jacobianul transformării inverse şi derivatele* r_{xx}, φ_{yy}, ψ_{zz} *în punctul* $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$.

R: 1) Jacobianul transformării este:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r\sin\psi \end{vmatrix} = -r^2\sin\psi.$$

Transformarea este regulată dacă $r \neq 0$ şi $\psi \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Jacobianul transformării inverse în punctul $(0,1,0)$ este:

$$\frac{D(r,\varphi,\psi)}{D(x,y,z)}(0,1,0) = \frac{1}{\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}\left(1,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)} = -1.$$

Transformarea inversă este:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \ \psi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Iar: $r_{xx}(0,1,0) = 1$, $\varphi_{yy}(0,1,0) = 0$, $\psi_{zz}(0,1,0) = -1$.

6.4 Dependenţă şi independenţă funcţională

6.35 *Să se arate că funcţiile:*

1) $f(x,y,z) = x+y+z,\quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2,\quad h(x,y,z) = xy+xz+yz.$
2) $f(x,y,z) = x+y+z,\quad g(x,y,z) = x-y+z,\quad h(x,y,z) = 4xy+4yz.$

sunt funcţional dependente pe $\mathbf{R}^3$.

R: 1) Matricea funcţională

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ y+z & x+z & x+y \end{bmatrix}$$

are rangul mai mic decât 3. Relaţia de dependenţă funcţională este: $g = f^2 - 2h$.

2) Matricea funcţională

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4x+4z & 4y \end{bmatrix}$$

are rangul mai mic decât 3. Relaţia de dependenţă funcţională este: $h = f^2 - g^2$.

6.36 *Să se arate că funcţiile:*

$$f(x,y,z) = \ln\left(x^2+y^2+z^2\right),$$
$$g(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+z\right),$$

sunt funcţional independente pentru $x>0, y>0, z>0$.

R: Matricea funcţională

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2} & \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2} \\ \dfrac{\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}+z\right)^2} & \dfrac{-\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}+z\right)^2} & \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}+z\right)^2} \end{bmatrix}$$

are rangul 2.

6.37 *Să se arate că funcţiile:*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x+y+z, \\ g(x,y,z) &= x^3+y^3+z^3+6xyz, \\ h(x,y,z) &= xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x), \end{aligned}$$

sunt funcţional dependente pe $\mathbf{R}^3$ *şi să se găsească relaţia de dependenţă funcţională.*

R: Matricea funcţională

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3x^2+6yz & 3y^2+6xz & 3z^2+6xy \\ y^2+z^2+2x(y+z) & z^2+x^2+2y(z+x) & x^2+y^2+2z(x+y) \end{bmatrix}$$

are rangul mai mic decât 3. Relaţia de dependenţă funcţională este: $f^3 = g + 3h$.

6.38 *Dacă funcţiile* f, g, h *sunt derivabile şi inversabile, atunci funcţiile:* $u = f\left(\dfrac{y}{z}\right)$, $v = g\left(\dfrac{z}{x}\right)$, $w = h\left(\dfrac{x}{y}\right)$, *definite pe* $D = \mathbf{R} \setminus \{(0,0,0)\}$, *sunt funcţional dependente pe* D.

R: Matricea funcţională

$$\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{z}f' & -\dfrac{y}{z^2}f' \\ -\dfrac{z}{x^2}g' & 0 & \dfrac{1}{x}g' \\ \dfrac{1}{y}h' & -\dfrac{x}{y^2}h' & 0 \end{bmatrix}$$

are rangul mai mic decât 3.

6.39 *Să se arate că funcţiile:*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy-z, \\ g(x,y,z) &= xz+y, \\ h(x,y,z) &= \left(x^2+1\right)\left(y^2+z^2\right)-\left(x^2-1\right)yz-x\left(y^2-z^2\right), \end{aligned}$$

sunt funcţional dependente pe $\mathbf{R}^3$ *şi să se găsească relaţia de dependenţă funcţională.*

R: Matricea funcţională are rangul mai mic decât 3. Relaţia de dependenţă funcţională este:

$$h = f^2 - fg + g^2.$$

6.40 *Să se arate că funcţiile:*

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1+x_2-x_3, \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2, \\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3-x_4^2, \end{aligned}$$

sunt funcţional dependente pe $\mathbf{R}^4$.

R: Rangul matricei funcţionale este mai mic decât 3. Relaţia de dependenţă funcţională este:

$$f_2 + f_3 = f_1^2.$$

6.41 *Să se arate că funcţiile:*

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ &f_3(x_1, x_2, \ldots, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \end{aligned}$$

sunt funcţional dependente pe $\mathbf{R}^4$.

R: Rangul matricei funcţionale este mai mic decât 3. Relaţia de dependenţă funcţională este:

$$f_2 + 2f_3 = f_1^2.$$

6.5 Schimbări de variabile

6.42 *Să se efectueze schimbarea de variabilă independentă* $x = \dfrac{1}{t}$ *în ecuaţia:*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0.$$

R: Deoarece: $\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{1}{x^2} = -t^2$ şi $\dfrac{d^2t}{dx^2} = \dfrac{2}{x^3} = 2t^3$, avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -t^2\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} = t^4\frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3\frac{dy}{dt}$$

şi deci ecuaţia devine: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$

6.43 *Să se efectueze schimbarea de variabilă independentă indicată în următoarele ecuaţii pentru funcţia* $y = y(x)$*:*

$$\begin{array}{ll} 1)\ x^2y'' - 2y = x^2 + \dfrac{1}{x}, & x = e^t. \\ 2)\ x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x, & x = e^t. \\ 3)\ \left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right)y' + y = 0, & x = \operatorname{tg} t. \\ 4)\ (1+x)^3 y'' + 3(1+x)^2 y' + (1+x)\, y = \ln(1+x)\,, & x = e^t - 1. \\ 5)\ \left(1-x^2\right)y'' - xy' + y = 0, & x = \cos t. \end{array}$$

R: Notăm $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$. Se obţine: 1) $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = e^{2t} + e^{-t}$,
2) $\dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = e^{3t} + 3e^t$. 3) $\ddot{y} + \dot{y} = 0$. 4) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = te^{-t}$.
5) $\ddot{y} + \dot{y} = 0$.

6.44 *Să se efectueze schimbarea variabilei independente în următoarele ecuaţii pentru funcţia $y = y(x)$, luând drept nouă variabilă independentă funcţia $t = t(x)$ indicată:*

$$1)\ (1+x)^2 y'' + (1+x) y' + y = 4\cos[\ln(1+x)], \qquad t = \ln(1+x).$$
$$2)\ x\left(1+x^2\right) y'' - \left(1 - x^2 y\sqrt{1+x^2}\right) y' - 3x^3y^2 = 0, \quad t = \sqrt{1+x^2}.$$

R: 1) Notăm $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$. Se obţine: 1) $\ddot{y} + \dot{y} = 4\cos t$. 2) $\ddot{y} + y\dot{y} - y^2 = 0$.

6.45 *Funcţia $y = y(x)$ verifică ecuaţia*

$$x^2 y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right) y = 4x.$$

Să se găsească ce devine această ecuaţie dacă se efectuează schimbarea de variabilă dependentă $y = \dfrac{1}{x^2} z$, unde $z = z(x)$.

R: $z'' - z = 4x$.

6.46 *Să se efectueze schimbarea de variabile independente indicată în următoarele ecuaţii pentru funcţia $z = z(x, y)$:*

1) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\ \ u = x,\ v = x^2 + y^2.$

2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z,\ \ u = x,\ v = \dfrac{x}{y}.$

3) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy,\ \ u = \ln x,\ v = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$

4) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0,\ \ u = \ln\sqrt{x^2+y^2},\ v = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}.$

R: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0$. 2) $u\dfrac{\partial z}{\partial u} - z = 0$. 3) $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = e^u \operatorname{sh} v$. 4) $\dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.

6.47 *Să se efectueze schimbarea de variabile independente $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ în ecuaţia lui Laplace:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R: Se obţine:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

6.48 *Să se efectueze schimbarea de variabile independente $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ în ecuaţia:*

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

R: Se obţine: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$.

6.49 *Să se efectueze schimbarea de variabile independente indicată în următoarele ecuaţii pentru funcţia $z = z(x, y)$:*

1) $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = xy, \ v = \dfrac{x}{y}.$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = ax + y, \ v = -ax + y.$

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad u = 3x + y, \ v = x + y.$

R: 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \dfrac{1}{2u} \dfrac{\partial z}{\partial v}$. 2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. 3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

6.50 *Să se efectueze schimbarea de variabile independente $u = \sin x + x - y$, $v = x - \sin x + y$, în ecuaţia:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cos x \, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \sin x \, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

R: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

6.51 *Să se efectueze schimbarea de variabile independente $u = x^2 - y^2$, $v = \dfrac{y}{x}$, în ecuaţia:*

$$xy \, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(x^2 + y^2\right) \, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y \, \frac{\partial z}{\partial x} - x \, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

R: $u \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.

6.52 *Să se efectueze schimbarea de variabile independente $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ în ecuaţia:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}.$$

R: Din $\dfrac{\sin \theta \cdot dr + r \cos \theta \cdot d\theta}{\cos \theta \cdot dr - r \sin \theta \cdot d\theta} = \dfrac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$, se obţine: $\dfrac{dr}{d\theta} = r$.

6.53 *Să se efectueze schimbarea de variabile $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $w = \ln z - (x + y)$, în ecuaţia:*

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x) \, z.$$

R: Se obţine: $\dfrac{\partial w}{\partial v} = 0$.

6.54 *Să se efectueze schimbarea de variabile $u = x$, $v = \dfrac{1}{y}$, $w = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x}$, în ecuaţia:*

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2.$$

R: Se obţine: $\dfrac{\partial w}{\partial u} = 0$.

6.55 *Să se efectueze schimbarea de variabile* $u = x + y$, $v = \dfrac{x}{y}$, $w = \dfrac{z}{x}$, *în ecuaţia:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R: Se obţine: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

6.56 *Să se efectueze schimbarea de variabile* $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$, *în ecuaţia:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R: Se obţine: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \dfrac{1}{2}$.

Capitolul 7

Extreme pentru funcţii de mai multe variabile

7.1 Puncte de extrem pentru funcţii de mai multe variabile

7.1 *Să se determine punctele de extrem ale funcţiilor:*

1) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. 2) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
3) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right)$. 4) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

R: 1) Punctele staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y^2 - 5) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6(xy - 2) = 0,$$

adică: $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$, $(-1,-2)$. Derivatele de ordinul doi sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

In punctul $(2,1)$, $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 108 > 0$, $(2,1)$ este un punct de minim, $f(2,1) = -28$. In punctul $(-2,-1)$, $\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 108 > 0$, $(-2,-1)$ este un punct de maxim, $f(-2,-1) = 28$. In punctele $(1,2)$, $(-1,-2)$, $\Delta_2 = -108 < 0$. Nu sunt puncte de extrem.

2) Un punct staţionar: $(0,3)$. $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$. Punctul $(0,3)$ este un punct de minim şi $f_{\min} = f(0,3) = -9$.

3) Un punct staţionar: $(21,20)$. $\Delta_1 = -\dfrac{2}{3} < 0$, $\Delta_2 = \dfrac{47}{144} > 0$. Punctul $(21,20)$ este un punct de maxim şi $f_{\max} = f(21,20) = 282$.

4) Un punct staţionare: $(0,0)$, $(-1,-1)$. Punctul $(0,0)$ nu este punct de extrem. Punctul $(-1,-1)$ este un punct de maxim şi $f_{\max} = f(-1,-1) = 1$.

7.2 *Să se determine punctele de extrem ale funcţiei*

$$f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y},\ x>0,\ y>0.$$

R: Punctele staţionare sunt soluţiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y-\frac{50}{x^3}=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=x-\frac{20}{y^2}=0.$$

Se obţine un singur punct staţionar $(5,2)$. Derivatele de ordinul doi sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{100}{x^3},\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{40}{y^3}.$$

Deci $\Delta_1=\frac{4}{5}>0$, $\Delta_2=3>0$. Punctul $(5,2)$ este un punct de minim şi $f_{\min}=f(5,2)=30$.

7.3 *Să se găsească extremele funcţiilor:*

$$\begin{array}{ll}
1)\ z=(x-1)^2+2y^2. & 2)\ z=x^2+xy+y^2-2x-y.\\
3)\ z=(x-1)^2-2y^2. & 4)\ z=x^3y^2(6-x-y),\ x>0,\ y>0.\\
5)\ z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}}. & 6)\ z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2.\\
7)\ z=1-\left(x^2+y^2\right)^{2/3}. & 8)\ z=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}.
\end{array}$$

R: 1) $z_{\min}=z(1,0)=0$. 2) $z_{\min}=z(1,0)=-1$ 3) Nu are extreme.
4) $z_{\max}=z(3,2)=108$.
5) Puncte staţionare: $(0,0)$, $\left(0,\pm\sqrt{3}\right)$, $\left(\pm\sqrt{3},0\right)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$.
Extreme: $z_{\max}=z(1,1)=z(-1,-1)=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $z_{\min}=z(1,-1)=z(-1,1)=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
6) $z_{\min}=z\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=z\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=-8$. 7) $z_{\max}=z(0,0)=1$.
8) $z_{\min}=z(0,0)=0$. In punctele cercului $x^2+y^2=1$, $z_{\max}=\frac{1}{e}$.

7.4 *Să se găsească extremele funcţiilor:*

$$\begin{array}{ll}
1)\ z=\dfrac{1+x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & 2)\ z=\left(x^2+y^2\right)e^{2x+3y},\ x\geq 0,\ y\geq 0.\\
3)\ z=x^3+y^3-9xy+27. & 4)\ z=\sin x+\sin y+\cos(x+y),\ x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].\\
5)\ z=x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y. &
\end{array}$$

R: 1) $z_{\max}=z(1,-1)=\sqrt{3}$. 2) $z_{\min}=z(0,0)=0$.
3) $(0,0)$ nu este punct de extrem, $z_{\min}=z(3,3)=0$.
4) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ nu este punct de extrem, $z_{\max}=z\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$.
5) $z_{\min}=z(1,-1)=-12$.

7.5 *Să se găsească extremele funcţiilor:*

1) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$
2) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$
3) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)\,,\ x,y,z \in (0,\pi)\,.$

R: 1) Un punct staţionar: $(-1,-2,3)$. $d^2 f(-1,-2,3) = 2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$ este o formă pătratică pozitiv definită şi deci punctul $(-1,-2,3)$ este un punct de minim, $f_{\min} = f(-1,-2,3) = -14$.

2) Două puncte staţionare: $(0,0,-1)$, $(24,-144,-1)$. Insă

$$d^2 f(x,y,z) = 6x\,dx^2 + 2\,dy^2 + 2\,dz^2 + 24\,dx\,dy,$$

iar: $d^2 f(0,0,-1) = 2\,dy^2 + 2\,dz^2 + 24\,dx\,dy = 2\,(dy + 6\,dx)^2 - 72\,dx^2 + 2\,dz^2$, formă pătratică nedefinită, deci $(0,0,-1)$ nu este punct de extrem,

$$d^2 f(24,-144,-1) = 144\,dx^2 + 2\,dy^2 + 2\,dz^2 + 24\,dx\,dy = (12\,dx + dy)^2 + dx^2 + 2dz^2,$$

formă pătratică pozitiv definită şi deci punctul $(24,-144,-1)$ este un punct de minim, $f_{\min} = f(24,-144,-1) = -6913$.

3) $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

7.2 Extreme pentru funcţii definite implicit

7.6 *Să se găsească extremele următoarelor funcţii* $z = f(x,y)$*, definite implicit prin ecuaţiile:*

1) $F(x,y;z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$
2) $F(x,y;z) = x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0.$

R: 1) Sistemul:

$$F_x = 2x - 2 = 0,\ F_y = 2y + 4 = 0,\ F = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0,$$

are soluţiile: $(1,-2;-2)$ şi $(1,-2;8)$. Ecuaţia $F(x,y;z) = 0$ defineşte două funcţii: $z = z_1(x,y)$ şi $z = z_2(x,y)$.

Pentru $z = z_1(x,y)$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{F_{xx}(1,-2;-2)}{F_z(1,-2;-2)} = \frac{1}{5},\ A_{12} = -\frac{F_{xy}(1,-2;-2)}{F_z(1,-2;-2)} = 0, \\ A_{22} &= -\frac{F_{yy}(1,-2;-2)}{F_z(1,-2;-2)} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

şi deci $\Delta_1 = \frac{1}{5} > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{25} > 0$, deci $(1,-2)$ este un punct de minim, $z_{\min} = z_1(1,-2) = -2$.

Pentru $z = z_2(x,y)$:

$$A_{11} = -\frac{F_{xx}(1,-2;8)}{F_z(1,-2;8)} = -\frac{1}{5},\ A_{12} = -\frac{F_{xy}(1,-2;8)}{F_z(1,-2;8)} = 0,\ A_{22} = -\frac{F_{yy}(1,-2;8)}{F_z(1,-2;8)} = -\frac{1}{5}$$

şi deci $\Delta_1 = -\dfrac{1}{5} < 0$, $\Delta_2 = \dfrac{1}{25} > 0$, deci $(1, -2)$ este un punct de maxim, $z_{\max} = z_2(1, -2) = 8$.

2) Sistemul:

$$F_x = 3x^2 - 3 = 0,\ F_y = -2y + 4 = 0,\ F = x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0,$$

are soluţiile: $(1, 2; 2)$, $(-1, 2; 1)$, $(1, 2; -3)$, $(-1, 2; -2)$. Ecuaţia $F(x, y; z) = 0$ defineşte două funcţii: $z = z_1(x, y)$ şi $z = z_2(x, y)$, fiecare având câte două puncte staţionare.

Pentru $z = z_1(x, y)$, în primul punct:

$$A_{11} = -\frac{F_{xx}(1, 2; 2)}{F_z(1, 2; 2)} = -\frac{6}{5},\ A_{12} = -\frac{F_{xy}(1, 2; 2)}{F_z(1, 2; 2)} = 0,\ A_{22} = -\frac{F_{yy}(1, 2; 2)}{F_z(1, 2; 2)} = \frac{2}{5}$$

şi deci $\Delta_1 = -\dfrac{6}{5} < 0$, $\Delta_2 = -\dfrac{12}{25} < 0$, deci $(1, 2)$ nu este un punct de de extrem. In punctul al doilea:

$$A_{11} = -\frac{F_{xx}(-1, 2; 1)}{F_z(-1, 2; 1)} = 2,\ A_{12} = -\frac{F_{xy}(-1, 2; 1)}{F_z(-1, 2; 1)} = 0,\ A_{22} = -\frac{F_{yy}(-1, 2; 1)}{F_z(-1, 2; 1)} = \frac{2}{3}.$$

Deci $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \dfrac{4}{3} > 0$, deci $(-1, 2)$ este un punct de minim, $z_{\min} = z_1(-1, 2) = 1$.

Pentru $z = z_2(x, y)$, în primul punct:

$$A_{11} = -\frac{F_{xx}(1, 2; -3)}{F_z(1, 2; -3)} = \frac{6}{5},\ A_{12} = -\frac{F_{xy}(1, 2; -3)}{F_z(1, 2; -3)} = 0,\ A_{22} = -\frac{F_{yy}(1, 2; -3)}{F_z(1, 2; -3)} = -\frac{2}{5}$$

şi deci $\Delta_1 = \dfrac{6}{5} > 0$, $\Delta_2 = -\dfrac{12}{25} < 0$, deci $(1, 2)$ nu este un punct de extrem. In punctul al doilea:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{F_{xx}(-1, 2; -2)}{F_z(-1, 2; -2)} = -2,\ A_{12} = -\frac{F_{xy}(-1, 2; -2)}{F_z(-1, 2; -2)} = 0, \\ A_{22} &= -\frac{F_{yy}(-1, 2; -2)}{F_z(-1, 2; -2)} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

şi deci $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \dfrac{4}{3} > 0$, deci $(-1, 2)$ este un punct de minim, $z_{\max} = z_1(-1, 2) = -2$.

7.7 *Să se găsească extremele următoarelor funcţii $z = f(x, y)$, definite implicit prin ecuaţiile:*

$$1)\ F(x, y; z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0.$$
$$2)\ F(x, y; z) = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} + 1 = 0.$$

R: 1) Sistemul $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F = 0$, are soluţiile $\left(0, 0; -\sqrt{3}\right)$, $\left(0, 0; \sqrt{3}\right)$.

Ecuaţia $F(x, y; z) = 0$ defineşte două funcţii: $z = z_1(x, y)$ şi $z = z_2(x, y)$, $z_{\min} = z_1(0, 0) = -\sqrt{3}$, $z_{\max} = z_2(0, 0) = \sqrt{3}$.

2) Sistemul $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F = 0$, are soluţiile $(0, 0; -5)$, $(0, 0; 5)$.

Ecuaţia $F(x, y; z) = 0$ defineşte două funcţii: $z = z_1(x, y)$ şi $z = z_2(x, y)$, $z_{\min} = z_1(0, 0) = 5$, $z_{\max} = z_2(0, 0) = -5$.

7.8 *Să se găsească extremele următoarelor funcţii $z = f(x,y)$, definite implicit prin ecuaţiile:*

1) $F(x,y;z) = 4xy - z^2 - 4x - 4y + 8 = 0.$
2) $F(x,y;z) = 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0.$

R: 1) Sistemul $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F = 0$, are soluţiile $(0,0;-2)$, $(0,0;2)$.

7.3 Extreme condiţionate

7.9 *Să se găsească extremele condiţionate ale următoarelor funcţii:*

1) $z = xy,\ pentru\ x + y - 1 = 0.$ 2) $z = x + 2y,\ pentru\ x^2 + y^2 - 5 = 0.$
3) $z = x^2 + y^2,\ pentru\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1.$ 4) $z = \cos^2 x + \cos^2 y,\ pentru\ y - x = \dfrac{\pi}{4}.$
5) $z = x^2 + y^2,\ pentru\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$ 6) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ pentru\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}.$

R: 1) Construim funcţia lui Lagrange: $L(x,y;\lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$. Sistemul:

$$L_x = y + \lambda = 0,\ \ L_y = x + \lambda = 0,\ L_\lambda = x + y - 1 = 0$$

are soluţia: $x_0 = \dfrac{1}{2}, y_0 = \dfrac{1}{2}, \lambda_0 = -\dfrac{1}{2}$. Fie $\Phi(x,y) = L(x,y;-\frac{1}{2}) = xy - \frac{1}{2}(x+y-1)$. Atunci

$$d^2\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = dx\,dy.$$

Insă $dx + dy = 0$ şi deci $d^2\Phi\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = -\,dx^2 < 0$. $z_{\max} = z\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

2) $z_{\max} = z(1,2) = 5$, $z_{\min} = z(-1,-2) = -5$.

3) $z_{\min} = z\left(\dfrac{18}{13},\dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{36}{13}$.

4) $z_{\max} = z\left(\dfrac{7\pi}{8} + k\pi, \dfrac{9\pi}{8} + k\pi\right) = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$,

$z_{\min} = z\left(\dfrac{3\pi}{8} + k\pi, \dfrac{5\pi}{8} + k\pi\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

5) $z_{\min} = z\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}, \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

6) $z_{\max} = z\left(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}\right) = 4a^2$, $z_{\min} = z\left(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}\right) = 4a^2$.

7.10 *Să se găsească extremele condiţionate ale următoarelor funcţii:*

1) $z = xy,\ pentru\ 2x + 3y - 5 = 0.$
2) $z = x^2 + y^2,\ pentru\ \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = 9.$
3) $z = 6 - 4x - 3y,\ pentru\ x^2 + y^2 = 1.$
4) $z = \cos^2 x + \cos^2 y,\ pentru\ x - y = \dfrac{\pi}{4},\ x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right).$

R: Avem:
1) $L(x,y;\lambda) = xy + \lambda(2x+3y-5)$, $\lambda = -\frac{5}{3}$, $z_{\max} = z\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$.
2) $\lambda_1 = -\frac{5}{3}$, $z_{\max} = z\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 25$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$,
$z_{\min} = z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$.
3) $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$, $z_{\max} = z\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right) = 11$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$, $z_{\min} = z\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = 1$.
4) $z_{\max} = z\left(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

7.11 *Să se găsească extremele condiţionate ale următoarelor funcţii:*

1) $u = x - 2y + 2z$, *pentru* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
2) $u = x^2 + y^2 + z^2$, *pentru* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c$.
3) $u = xy^2z^3$, *pentru* $x + 2y + 3z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
4) $u = xy + xz + yz$, *pentru* $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
5) $u = x + y + z$, *pentru* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

R: Avem:
1) $u_{\min} = u(-1,2,-2) = -9$, $u_{\max} = u(1,-2,2) = 9$.
2) $u_{\max} = u(\pm a,0,0) = a$, $u_{\min} = u(0,0,\pm c) = c$. 3) $u_{\max} = u(1,1,1) = 1$.
4) $u_{\min} = u(1,1,1) = 3$. 5) $u_{\min} = u(3,3,3) = 9$.

7.12 *Să se găsească extremele condiţionate ale următoarelor funcţii:*

1) $u = xyz$, *pentru* $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$, $x \geq y \geq z > 0$.
2) $u = xyz$, *pentru* $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

R: 1) Funcţia lui Lagrange:

$$L(x,y,z;\lambda,\mu) = xyz + \lambda(x+y+z-5) + \mu(xy+xz+yz-8),$$

are punctele staţionare: $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3};\frac{16}{9},-\frac{4}{3}\right)$ şi $(2,2,1;4,-2)$.
$u_{\max} = u\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{112}{27}$, $u_{\min} = u(2,2,1) = 4$.
2) $u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$, $u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

7.13 *Să se găsească extremele condiţionate ale următoarelor funcţii:*

1) $u = x^4 + y^4 + z^4$, *pentru* $x + y + z = 3$.
2) $u = x^3 + y^3 + z^3$, *pentru* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

7.14 *Să se determine dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic a.î.:*
1) *Aria totală să fie egală cu* $2a^2$ *şi volumul maxim.*
2) *Suma celor trei dimensiuni egală cu a şi aria totală maximă.*
3) *Volumul egal cu* a^3 *şi aria totală minimă.*

R: Avem:
1) $\mathcal{V}_{\max} = \mathcal{V}\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.
2) $\mathcal{A}_{\max} = \mathcal{A}\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right) = \dfrac{2}{3}a^2$.
3) $\mathcal{A}_{\min} = \mathcal{A}\left(a, a, a\right) = 6a^2$.

Capitolul 8

Şiruri şi serii de funcţii

8.1 Şiruri de funcţii reale

8.1 *Se dă şirul de funcţii* (f_n), $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{nx^2}{2}}$. *Să se determine mulţimea de convergenţă şi funcţia limită.*

R: Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

rezultă că mulţimea de convergenţă este $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, iar funcţia limită: $f(x) = 0$.

8.2 *Să se arate că şirul de funcţii* $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$, *este simplu convergent pe* $\mathbf{R}$ *către* $f(x) = 0$.

R: Intr-adevăr, $\dfrac{x^2}{n+1} < \varepsilon$ d.d. $n > \dfrac{x^2 - \varepsilon}{\varepsilon}$. Deci

$$N(\varepsilon, x) = \begin{cases} \left[\dfrac{x^2 - \varepsilon}{\varepsilon}\right], & \text{dacă } \varepsilon < x^2, \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon \geq x^2. \end{cases}$$

8.3 *Să se arate că şirul de funcţii* $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2+1}$, $x \in [0, \pi]$, *este uniform convergent către* $f(x) = 0$.

R: Intr-adevăr, $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2+1}\right| < \varepsilon$ dacă $\dfrac{1}{n^2+1} < \varepsilon$, adică d.d. $n^2 > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Deci

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right], & \text{dacă } \varepsilon < 1, \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

8.4 *Să se arate că şirul de funcţii* $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$, $x \in \mathbf{R}$ *cu* $\alpha > 0$, *este uniform convergent pe* $\mathbf{R}$ *către* $f(x) = 0$.

R: Intr-adevăr, $\left|\dfrac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{n^\alpha} \to 0$.

8.5 *Să se arate că şirul de funcţii* $f_n(x) = \dfrac{1}{ne^{nx}}$, $x \in [0, \infty)$, *este uniform convergent pe* $[0, \infty)$ *către* $f(x) = 0$.

R: Pentru $x \geq 0$, $e^{nx} \geq 1$ şi deci $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n} \to 0$.

8.6 *Se dă şirul de funcţii* $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^4}$, $x \in [1, \infty)$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n) *este uniform convergent pe* $[1, \infty)$ *către* f.

R: $0 < f_n(x) = \dfrac{2nx^2}{n^2 + x^4} \cdot \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{2n} \to 0$.

8.7 *Se dă şirul de funcţii* $f_n(x) = \dfrac{x}{n + x}$, $x \in (0, \infty)$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n) *nu este uniform convergent pe* $(0, \infty)$ *către* f.

R: $f(x) = 0$, însă pentru $x_n = n$, $f_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$.

8.8 *Se dă şirul de funcţii* $f_n(x) = \dfrac{x}{n + x}$, $x \in [3, 4]$. *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n) *este uniform convergent pe* $[3, 4]$ *către funcţia* $f(x) = 0$, $x \in [3, 4]$.

R: Pentru $3 \leq x \leq 4$, avem: $0 < f_n(x) \leq \dfrac{4}{n + 3} < \dfrac{4}{n} \to 0$.

8.9 *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n), $f_n(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + n^3}$, *nu este uniform convergent pe* $(0, \infty)$.

R: $f(x) = 0$, însă pentru $x_n = n$, $f_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$.

8.10 *Se dă şirul de funcţii* (f_n), $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *definite prin:* $f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{n} x^k$. *Să se arate că multimea de convergenţă a şirului este* $A = (-1, 1)$, *însă şirul nu este uniform convergent pe* $(-1, 1)$. *Să se găsească o mulţime de convergenţă uniformă.*

R:Deoarece, $f_n(x) = \dfrac{1}{1 - x} + \dfrac{x^{n+1}}{x - 1}$, pentru $x \neq 1$, rezultă că $f_n(x)$ este divergent pentru $|x| > 1$, este convergent pentru $|x| < 1$. Apoi, $f_n(1) = n \to \infty$, $f_n(-1) =$

$\dfrac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)$ este un şir divergent. Deci mulţimea de convergenţă a şirului este $A = (-1,1)$ şi funcţia limită este $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Dacă şirul ar fi uniform convergent pe $(-1,1)$, pentru orice $\varepsilon > 0$ ar exista un $N(\varepsilon)$ a.î. $\left|\dfrac{x^{n+1}}{x-1}\right| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in (-1,1)$, inegalitate echivalentă cu:

$$n+1 > \frac{1}{\ln\frac{1}{|x|}}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} - \ln|x-1|\right), \text{ dar } \sup_{|x|<1}\left(\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{|x|}} + \frac{\ln\frac{1}{|x-1|}}{\ln\frac{1}{|x|}}\right) = +\infty.$$

Pentru orice interval $[-a,a] \subset (-1,1)$, putem lua

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{|a|}}\right]$$

şi deci şirul (f_n) este uniform convergent pe orice interval $[-a,a] \subset (-1,1)$.

8.11 *Se dă şirul de funcţii* (f_n), $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *definite prin:* $f_n(x) = 1 + x^{2n}$.

1) Să se găsească multimea de convergenţă a şirului şi funcţia limită.

2) Să se arate că şirul nu este uniform convergent pe $(-1,1)$.

3) Să se găsească o mulţime de convergenţă uniformă.

R: 1) $A = [-1,1]$, iar funcţia limită este:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1,1), \\ 2, & x \in \{-1,1\}. \end{cases}$$

3) Şirul (f_n) este uniform convergent pe orice interval $[-a,a] \subset (-1,1)$.

8.12 *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n), $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *definite prin:*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^3},$$

este uniform convergent pe $\mathbf{R}$, *iar limita sa este o funcţie continuă cu derivată continuă pe* $\mathbf{R}$.

R: Aplicăm criteriul lui Cauchy:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^3} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} < \frac{1}{n}.$$

Analog se arată că şirul (f_n'), $f_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx}{k^2}$, este uniform convergent pe $\mathbf{R}$. Deci

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

8.13 *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n)*, definite prin* $f_n(x) = x \operatorname{arctg}(nx)$*, este uniform convergent pe* $[0, \infty)$*.*

R: Aplicăm criteriul lui Cauchy:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = x \cdot |\operatorname{arctg}((n+p)x) - \operatorname{arctg}(nx)| = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{px}{1+(n+p)nx^2} <$$

$$< x \cdot \operatorname{arctg} \frac{px}{(n+p)nx^2} \leq x \cdot \frac{p}{(n+p)nx} = \frac{p}{(n+p)n} < \frac{1}{n}.$$

8.14 *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n)*, definite prin* $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$*, converge uniform pe* $\mathbf{R}$ *către funcţia* $f(x) = 0$*.*

R: Se va observa că $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

8.15 *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n)*, definite prin* $f_n(x) = \dfrac{\sin^2 nx}{n+1}$*,* $x \in [0, \pi]$*, este uniform convergent către funcţia* $f(x) = 0$ *şi că deşi funcţiile* f_n *şi* f *sunt derivabile pe* $[0, \pi]$*, şirul derivatelor* $f_n'(x) = \dfrac{n}{n+1} \sin 2nx$ *nu este convergent pe* $[0, \pi]$*.*

R: Intr-adevăr, pentru $x = \dfrac{\pi}{4}$ şirul $f_n'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ este divergent.

8.16 *Se dă şirul de funcţii* (f_n)*,* $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$*,* $x \in [-1, 1]$*. Să se cerceteze dacă se poate aplica şirului* (f_n) *teorema de derivare termen cu termen.*

R: Şirul este convergent pe $[-1, 1]$ la funcţia $f(x) = 0$. Şirul derivatelor:

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, \text{ are } \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \end{cases}$$

şi nu este uniform convergent pe $[-1, 1]$. Deci nu se poate aplica şirului (f_n) teorema de derivare termen cu termen.

8.17 *Se dă şirul* (f_n)*,* $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} x^n$*,* $x \in \mathbf{R}$*. Să se arate că:*

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

R: Deoarece mulţimea valorilor funcţiei $\operatorname{arctg} x$ este intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $|\operatorname{arctg} x| < \dfrac{\pi}{2}$ şi deci:

$$0 \leq |f_n(x)| = \left|\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} x^n\right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

de unde deducem că şirul este convergent pe $\mathbf{R}$ la funcţia $f(x) = 0$ şi deci: $f'(1) = 0$. Pe de altă parte:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(1) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

8.18 *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n), $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, *definite prin:* $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ *este convergent, însă*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

R: Intr-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^n}\right)=\frac{1}{2},\quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

8.19 *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n), $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, *definite prin:* $f_n(x) = n^2x^3e^{-n^2x^3}$ *este convergent, însă*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

R: Intr-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3e^{n^2}}\right)=\frac{1}{3},\quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

8.20 *Să se arate că şirul de funcţii* (f_n), $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, *definite prin:* $f_n(x) = nx(1-x)^n$ *nu este uniform convergent pe* $[0,1]$, *totuşi*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

R: Şirul este convergent pe $[0,1]$ la funcţia $f(x)=0$. Dar, pentru $x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$,

$$f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0,$$

deci convergenţa nu este uniformă. Pe de altă parte:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x)^n\,dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \to 0,\quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

8.2 Serii de funcţii

8.21 *Să se determine mulţimea de convergenţă a următoarelor serii de funcţii:*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$. 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$. 3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$.

R: 1) Aplicăm criteriul rădăcinii: $A = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. 2) Aplicăm criteriul rădăcinii: $A = \mathbf{R} \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$. Pentru $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, obţinem seria armonică generalizată, convergentă dacă $\alpha > 1$, iar pentru $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, obţinem seria armonică generalizată alternantă, convergentă dacă $\alpha > 0$. 3) Aplicând criteriul raportului obţinem o serie convergentă pentru: $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Pentru $x = 0$ seria este de asemenea convergentă. Deci $A = \mathbf{R}$.

8.22 *Să se determine mulţimea de convergenţă a următoarelor serii de funcţii:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1} \left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^n.\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\left(n^3+n+1\right)^{\alpha}} \frac{1}{\ln\left(n^2+1\right)} \cdot \left(x^3-2x\right)^n,$$

$\alpha \in \mathbf{R}$.

R: 1) Din $\left|\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right| < 1$ rezultă $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Pentru $x = \pm 1$ seria este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Deci: $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. 2) Din $\left|x^3 - 2x\right| < 1$ rezultă că seria este convergentă pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru:

$$x \in \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Pentru $x \in \left\{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$ seria este convergentă dacă $\alpha \geq \frac{1}{6}$, iar pentru $x \in \left\{-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ seria este convergentă dacă $\alpha > \frac{1}{2}$.

8.23 *Să se determine mulţimea de convergenţă a următoarelor serii de funcţii:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n} \cdot \sqrt{n^2+1}} \operatorname{tg}^n x.\ \ 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1} \left(\frac{4x-1}{x+3}\right)^n.$$

R: 1) $A = \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. 2) $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{3}\right]$.

8.24 *Să se studieze convergenţa următoarelor serii de funcţii, pe mulţimile indicate:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}},\ x \in [\alpha, 2\pi - \alpha],\ \alpha \in (0, \pi).\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{x^2+n}},\ x \in \mathbf{R}.$$

R: Din criteriul lui Dirichlet rezultă că seriile sunt uniform convergente pe mulţimile indicate.

8.25 *Să se studieze convergenţa următoarelor serii de funcţii, definite pe* $\mathbf{R}$*:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{1+n^3x^4},\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}.\ \ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \frac{\cos nx}{n+1}.$$

R: 1) Din $\left(1 - x^2\sqrt{n^3}\right)^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deducem că $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n^3}}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $\forall n \in \mathbf{N}^*$. In baza criteriului lui Weierstrass, rezultă că seria este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbf{R}$. 2) Deoarece $|f_n(x)| \leq \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $\forall n \in \mathbf{N}^*$. In baza criteriului lui Weierstrass, rezultă că seria este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbf{R}$. 3) Deoarece $|f_n(x)| < \dfrac{3}{n^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi $\forall n \in \mathbf{N}^*$. In baza criteriului lui Weierstrass, rezultă că seria este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbf{R}$.

8.26 *Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a următoarelor serii de funcţii, pe mulţimile indicate:*

$$1)\ x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x}\right),\ x \in [0,1].\ \ 2)\ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n-1}\right),\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

R: 1) $s_n(x) = \dfrac{x}{1+nx} \to 0$, deci seria este convergentă la funcţia $f(x) = 0$ pe $[0,1]$. Apoi, din: $|s_n(x) - 0| < \dfrac{1}{n}$, $\forall x \in [0,1]$, rezultă că seria este uniform convergentă pe $[0,1]$.

2) $s_n(x) = x^n \to 0$ şi $|s_n(x) - 0| \leq |x|^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, rezultă că seria este uniform convergentă pe $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

8.27 *Să se arate că seria de funcţii:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right],$$

este convergentă pe $[0,1]$ *la o funcţie continuă, dar nu este uniform convergentă pe* $[0,1]$.

R: 1) Şirul: $s_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ converge la funcţia $f(x) = 0$ pe $[0,1]$ care este continuă. Pe de altă parte, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, pentru $x_n = \dfrac{1}{n}$, avem: $|s_n(x) - 0| = \dfrac{1}{2}$. Aşadar, există un $\varepsilon > 0$ a.î. oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $|s_n(x) - 0| \geq \varepsilon$ pentru cel puţin un punct din intervalul $[0,1]$. Deci seria nu este uniform convergentă pe $[0,1]$.

8.28 *Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a următoarelor serii de funcţii, pe mulţimile indicate:*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{nx}{1+n+x} - \dfrac{(n-1)x}{n+x}\right]$, $x \in [0,1]$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{nx}{1+nx}-\dfrac{(n-1)\,x}{(n)-1+x}\right],\ x\in[0,1]$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[nxe^{-nx}-(n-1)\,xe^{-(n-1)x}\right],\ x\in[0,1]$.

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^2}{(1+x)^n},\ x\in\mathbf{R}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{2n}-x^{n-1}+x^{2n-2}\right),\ x\in[0,1]$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^2+n},\ x\in\mathbf{R}$.

R: 1) Uniform convergentă. 2) Simplu convergentă. 3) Simplu convergentă. 4) Conform criteriului lui Cauchy, seria este uniform convergentă pe **R**. 5) Simplu convergentă. 6) Uniform convergentă.

8.29 *Să se arate că seriile următoare sunt uniform convergente pe mulţimile indicate:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\ x\in[-1,1]\,.\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n},\ x\in\mathbf{R}.\ \ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}},\ x\in[0,1]\,.$$

R: 1) Din $|x|\leq 1$, rezultă $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$.

2) $\left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right|\leq\dfrac{1}{2^n}$, pe **R**.

3) $\left|(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}\right|\leq\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pe $[0,1]$.

8.30 *Aplicând derivarea şi integrarea termen cu termen să se găsească sumele următoarelor serii de funcţii definite pe intervalul* $(-1,1)$*:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}.\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,x^n.\ \ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n.\ \ 4)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}.\ \ 5)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2\,x^{n-1}.$$

R: Seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ este convergentă pe intervalul mărginit $(-1,1)$ şi are ca sumă funcţia $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

1) Derivând termen cu termen seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ obţinem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2) Integrând termen cu termen seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ obţinem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)$.

3) Trecând pe x în $-x$ în 2) obţinem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1-x)$.

4) Trecând x în $-x^2$ în seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ obţinem convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ a cărei sumă este $\frac{1}{1+x^2}$. Integrând termen cu termen această serie, obţinem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x.$$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

8.31 *Să se arate că:*

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}\right)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}\right) dx.$$

R: Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}\right)$ are ca sumă funcţia $f(x) = 0$, deci $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Pe de altă parte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 0.$$

8.3 Serii de puteri

8.32 *Să se calculeze raza de convergenţă a următoarelor serii de puteri:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n. \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (x-1)^n. \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (x+3)^n.$$

R: 1) $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}$, deci $r = 2$. 2) $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = 1$, deci $r = 1$. 3) $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 4$, deci $r = \frac{1}{4}$.

8.33 *Să se determine intervalul de convergenţă şi să se studieze convergenţa la capetele intervalului, pentru următoarele serii de puteri:*

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^n}. \quad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n \sqrt{n+1}}. \quad 3)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+2)^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}. \quad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}.$$

R: 1) $[-3,3)$. 2) $(-5,5]$. 3) $\left[-2-\frac{\sqrt{3}}{2}, -2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 4) $[-1,3)$.

8.34 *Să se determine intervalul de convergenţă şi să se studieze convergenţa la capetele intervalului, pentru următoarele serii de puteri:*

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\sqrt{n^2+1}}{n\cdot\ln^{\alpha}n}\,x^n,\ \alpha>1.\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\dots\cdot(4n-3)}{n!}\,x^n.$$

R: 1) $r=1$. In punctul $x=1$ seria este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. In punctul $x=-1$ seria este convergentă, conform criteriului lui Bertrand. Deci intervalul de convergenţă este $[-1,1]$.

2) $r=\frac{1}{4}$. In punctul $x=\frac{1}{4}$ seria este divergentă, conform criteriului lui Raabe-Duhamel, iar în punctul $x=-\frac{1}{4}$ seria este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Deci intervalul de convergenţă este $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

8.4 Serii Taylor

8.35 *Să se arate că:*

$$1)\ e^x=1+\frac{1}{1!}\,x+\frac{1}{2!}\,x^2+\dots+\frac{1}{n!}\,x^n+\cdots,\ x\in\mathbf{R}.$$
$$2)\ \sin x=\frac{1}{1!}\,x-\frac{1}{3!}\,x^3+\frac{1}{5!}\,x^5-\dots+(-1)^{n-1}\,\frac{1}{(2n-1)!}\,x^{2n-1}+\cdots,\ x\in\mathbf{R}.$$
$$3)\ \cos x=1-\frac{1}{2!}\,x^2+\frac{1}{4!}\,x^4-\dots+(-1)^n\,\frac{1}{(2n)!}\,x^{2n}+\cdots,\ x\in\mathbf{R}.$$
$$4)\ \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{3}\,x^3-\dots+(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\,x^n+\cdots,\ x\in(-1,1].$$

8.36 *Să se arate că pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$ şi $x\in(-1,1)$ are loc dezvoltarea binomială:*

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}\,x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n+\cdots.$$

8.37 *Să se stabilească formula lui Euler: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.*

8.38 *Să se găsească seriile Mac-Laurin ale funcţiilor:*

$$1)\ \operatorname{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2},$$
$$2)\ \operatorname{sh}x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

R: Se obţine:

$$1)\ \operatorname{ch}x = 1+\frac{1}{2!}\,x^2+\frac{1}{4!}\,x^4+\dots+\frac{1}{(2n)!}\,x^{2n}+\cdots,\ x\in\mathbf{R}.$$
$$2)\ \operatorname{sh}x = \frac{1}{1!}\,x+\frac{1}{3!}\,x^3+\frac{1}{5!}\,x^5+\dots+\frac{1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}+\cdots,\ x\in\mathbf{R}.$$

8.39 *Să se găsească seriile Mac-Maurin ale următoarelor funcţii:*

$$1)\ f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}. \quad 2)\ f(x) = a^x,\ a>0.$$
$$3)\ f(x) = \cos(x+\alpha). \quad 4)\ f(x) = \sin^2 x.$$
$$5)\ f(x) = \ln(2+x).$$

R: 1) Putem scrie:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n 2^{n+1}\right] x^n,\ |x| < \frac{1}{2}.$$

2) Se obţine:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n,\ x \in \mathbf{R}.$$

3) Se ţine seama că: $f(x) = \cos x \cos\alpha - \sin x \sin\alpha$. 4) Se ţine seama că: $f(x) = \frac{1}{2}(1-\cos x)$. 5) Funcţia se mai poate scrie: $f(x) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$, pentru $x \in (-2,2]$.

8.40 *Aplicând derivarea şi integrarea termen cu termen, să se găsească seriile Mac-Laurin ale următoarelor funcţii:*

$$1)\ f(x) = (1+x)\ln(1+x). \quad 2)\ f(x) = \operatorname{arctg} x.$$
$$3)\ f(x) = \arcsin x. \quad 4)\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

R: 1) Deoarece $f'(x) = \ln(1+x)$, ţinând seama de dezvoltarea funcţiei $\ln(1+x)$, prin integrare obţinem:

$$(1+x)\ln(1+x) = \frac{1}{1\cdot 2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} x^n + \cdots,\ x \in (-1,1].$$

2) Avem că: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1}$. Dar, înlocuind în dezvoltarea binomială, pentru $\alpha = -1$, pe x prin x^2, obţinem:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

care prin integrare, dă:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},\ x \in (-1,1).$$

3) Avem că: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$. Dar, înlocuind în dezvoltarea binomială, pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, pe x prin $-x^2$, obţinem:

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

care prin integrare, dă:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \ x \in (-1,1).$$

4) Avem că: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-1/2}$. Dar, înlocuind în dezvoltarea binomială, pentru $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, pe x prin x^2, obţinem:

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

care prin integrare, dă:

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \ x \in (-1,1).$$

8.41 *Să se găsească seriile Mac-Laurin ale funcţiilor:*

$$1)\ f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \ \ 2)\ f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt, \ \ 3)\ f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

R: 1) Inlocuind în dezvoltarea funcţiei e^x pe x prin $-t^2$ şi integrând între 0 şi x, obţinem:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \ x \in \mathbf{R}.$$

2) Inlocuind în dezvoltarea funcţiei $\operatorname{arctg} x$ pe x prin t, împărţind prin t şi integrând între 0 şi x obţinem:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} x^{2n+1}, \ x \in [-1,1].$$

3) Inlocuind în dezvoltarea funcţiei $\ln(1+x)$ pe x prin t, împărţind prin t şi integrând între 0 şi x obţinem:

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} x^n, \ x \in [-1,1].$$

8.42 *Să se determine parametrii reali α şi β a.î. seriile:*

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2}\right]. \ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left[1 + e^{\frac{1}{n}} + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta - 1}{n^2}\right]$$

să fie convergente.

R: 1) Se folosesc dezvoltările în serii de puteri ale funcţiilor $\operatorname{arctg} x$ şi $\ln(1+x)$ şi se găseşte $\alpha = 2$ şi $\beta = \dfrac{1}{2}$. 2) Se foloseşte dezvoltarea lui e^x şi se obţine $\alpha = 1$ şi $\beta = \dfrac{3}{2}$.

Capitolul 9

Integrala Riemann şi extinderi

9.1 Primitive. Integrala nedefinită

9.1 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int \left(6x^2+8x+3\right) dx.\ \ 2)\ \int \sqrt{2px}dx.\ \ 3)\ \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$$

$$4)\ \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}.\ \ 5)\ \int \frac{dx}{x^2+7}.\ \ 6)\ \int \frac{dx}{x^2-10}.$$

R: 1) $2x^3+4x^2+3x+C$, 2) $\frac{2}{3}x\sqrt{2px}+C$, 3) $\frac{n}{n-1}x^{1-\frac{1}{n}}+C$,
4) $\arcsin\frac{1}{4}x\sqrt{2}+C$, 5) $\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{7}}+C$, 6) $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+C$.

9.2 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}.\ \ 2)\ \int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}.\ \ 3)\ \int \frac{dx}{2x^2+3x+2}.$$

$$4)\ \int \frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)^2}.\ \ 5)\ \int \frac{dx}{x^4+1}.\ \ 6)\ \int \frac{x^4dx}{x^3-1}.$$

R: 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x+1)}+C$. 2) $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C$.
3) $\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{7}}(4x+3)+C$. 4) $\frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+4x+5}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,(x+2)+C$.
5) $\frac{1}{8}\sqrt{2}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\mathrm{arctg}\,\left(x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{4}\sqrt{2}\mathrm{arctg}\,\left(x\sqrt{2}-1\right)+C$.
6) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{3}\sqrt{3}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)+C$.

9.3 *Să se calculeze, efectuând schimbarea de variabilă indicată:*

$$1)\ \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx,\ t=\ln x.\ \ 2)\ \int \frac{e^x}{e^x+1}dx,\ t=e^x.$$

$$3)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}},\ t=5x.\ \ 4)\ \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}},\ t=x^4.$$

$$5)\ \int \frac{\cos x}{a^2+2\sin^2 x}dx,\ t=\frac{1}{a}\sin x.\ \ 6)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x},\ t=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

$$7)\ \int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}}dx,\ t=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x.\ \ 8)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}},\ t^2=1+\frac{1}{x^4}.$$

R: 1) $\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}} x+C$. 2) $\ln(e^x+1)+C$.
3) $\frac{1}{5}\arcsin 5x+C$. 4) $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$.
5) $\frac{1}{|a|\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{|a|}\sin x\right)+C$. 7) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\sin x\right)+C$.
8) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+C$.

9.4 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int \frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx.\ \ 2)\ \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx.\ \ 3)\ \int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx.$$

$$4)\ \int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx.\ \ 5)\ \int (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)^2\,dx.\ \ 6)\ \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}dx.$$

$$7)\ \int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx.\ \ 8)\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx.\ \ 9)\ \int \sqrt{x^2+1}dx.$$

$$10)\ \int \sqrt{9-x^2}dx.\ \ 11)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx.\ \ 12)\ \int \sqrt{x^2+x+1}dx.$$

R: 1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)+C$. 2) $t=2^x$, dă: $\frac{1}{\ln 2}\arcsin t+C$.
3) $\frac{1}{2}x^2+\frac{12}{7}\left(\sqrt[6]{x}\right)^7+3\sqrt[3]{x}+C$. 4) $\frac{1}{\ln 2+3\ln 5+2\ln 3}2^x3^{2x}5^{3x}+C$.
5) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$. 6) $t=\arcsin x$, dă: $\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$.
7) $-\frac{\ln^3 x}{x}-\frac{3}{x}\ln^2 x-\frac{6}{x}\ln x-\frac{6}{x}+C$.
8) $\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx+C$.
9) $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{(x^2+1)}\right)+C$.

10) $\frac{1}{2}x\sqrt{(9-x^2)}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{1}{3}x+C$. 11) $t^2=x^3$, dă: $\frac{2}{3}\arcsin t+C$.
12) $\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$.

9.5 *Să se găsească formule de recurenţă pentru integralele:*

$$1)\ I_n(x)=\int\sin^n x\,dx.\ \ 2)\ J_n(x)=\int\cos^n x dx.$$

R: 1) $I_n(x)=\frac{n-1}{n}I_{n-2}(x)-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x$, $n\geq 2$.
2) $J_n(x)=\frac{n-1}{n}J_{n-2}(x)+\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x$, $n\geq 2$.

9.6 *Să se găsească formule de recurenţă pentru integralele:*

$$1)\ I_n(x)=\int\frac{dx}{\cos^n x}.\ \ 2)\ I_n(x)=\int x^n e^{-x}dx.$$

R: 1) $I_{n+2}(x)=\frac{1}{(n+1)\cos^{n+1}x}+\frac{n}{n+1}I_n(x)$. 2) $I_n(x)=-x^n e^{-x}+nI_{n-1}(x)$.

9.7 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int\sqrt{-x^2+3x-2}dx.\ \ 2)\ \int\frac{x^4+1}{x^3+1}dx.\ \ 3)\ \int\frac{dx}{x^3+x^5}.$$

$$4)\ \int\frac{x+1}{x^4+x^2+1}dx.\ \ 5)\ \int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}.\ \ 6)\ \int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx.$$

$$7)\ \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.\ \ 8)\ \int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx.\ \ 9)\ \int\frac{dx}{2x^2+3x+2}.$$

R: 1) $-\frac{1}{4}(-2x+3)\sqrt{(-x^2+3x-2)}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-3)+C$.
2) $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\ln(x+1)-\frac{1}{3}\ln\left(x^2-x+1\right)+C$.
3) $\int\frac{dx}{x^3+x^5}=-\frac{1}{2x^2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$.
4) $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)-\frac{1}{6}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)+C$.
5) $\frac{1}{2}\ln x-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)+C$.
6) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+8\right)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C$. 7) $\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.
8) $-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\frac{x-1}{x+3}+C$. 9) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}(4x+3)+C$.

9.8 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}dx.\ \ 2)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}}dx.\ \ 3)\ \int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}dx.$$

$$4)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}.\ \ 5)\ \int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}.\ \ 6)\ \int \frac{dx}{5+4\sin x}.$$

$$7)\ \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.\ \ 8)\ \int \frac{dx}{\sin 2x-\cos 2x}.\ \ 9)\ \int \operatorname{tg}^7 x\,dx.$$

9.9 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}.\ \ 2)\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}.\ \ 3)\ \int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}dx.$$

$$4)\ \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}.\ \ 5)\ \int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx.\ \ 6)\ \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx.$$

9.10 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int \frac{\left(e^{3x}-e^x\right)dx}{e^{4x}-e^{3x}+2e^{2x}-e^x+1}.\ \ 2)\ \int \cos x\cdot\cos 3x\cdot\cos 6x\,dx.$$

$$3)\ \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}e^{\operatorname{arctg} x}dx.\ \ 4)\ \int \frac{2x-5}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+a}\,dx,\ a>1.$$

R: 1) $\ln\dfrac{e^{2x}-e^x+1}{e^{2x}+1}+C$. 2) $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2}\sin 4x+\dfrac{1}{4}\sin 8x+\sin 2x+\dfrac{1}{5}\sin 10x\right)$.
3) $xe^{\operatorname{arctg} x}+C$. 4) $\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-5x+5}{\sqrt{a-1}}+C$.

9.11 *Să se calculeze integralele:*

$$I(x)=\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3+\sin 4x}}dx,\ \ J(x)=\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+\sin 4x}}dx.$$

R: $I(x)+J(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{2}\cos 4x\right)+C_1$, $I(x)-J(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3+\sin 4x}+C_2$.

9.12 *Să se calculeze integralele:*

$$I(x)=\int \frac{\sin x}{e^x+\sin x+\cos x}\,dx,\ \ J(x)=\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x+\cos x}\,dx.$$

R: Se calculează $J(x)+I(x)$ şi $J(x)-I(x)$.

9.13 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.\ \ 2)\ \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx.$$

R: 1) Integrala se poate pune sub forma:

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Derivând şi identificând coeficienţii, obţinem: $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{6}$, $\gamma=\frac{7}{6}$, $\lambda=\frac{5}{2}$. Găsim:

$$\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

2) $\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C.$

9.14 *Să se calculeze integralele binome:*

$$1)\ \int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.\quad 2)\ \int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}.\quad 3)\ \int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.\quad 4)\ \int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

R: 1) $\frac{m+1}{n}=0$, se efectuează schimbarea de variabilă: $x^2+1=t^3$ şi se obţine:

$$\frac{3}{2}\int\frac{tdt}{t^3-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\arctan\frac{1}{3}\left(2t+1\right)\sqrt{3}+C.$$

2) $\frac{m+1}{n}+p=0$, se efectuează schimbarea de variabilă: $1+x^{-4}=t^4$ şi se obţine:

$$-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t+C.$$

3) $\frac{m+1}{n}=3$, se efectuează schimbarea de variabilă: $1+x^{\frac{2}{3}}=t^2$ şi se obţine:

$$3\int\left(t^2-1\right)^2dt=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C.$$

4) $\frac{m+1}{n}=2$, se efectuează schimbarea de variabilă: $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$ şi se obţine:

$$12\int t^3\left(t^3-1\right)dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C.$$

9.15 *Să se calculeze integralele binome:*

$$1)\ \int x^3\left(2x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}dx.\quad 2)\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(x^3+2\right)^5}}.$$

$$3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}.\quad 4)\ \int\sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}dx.$$

9.2 Integrala definită

9.16 *Să se arate că:*

$$1)\ \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}.\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln 2.$$

R: Se va observa că:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx.\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx.$$

9.17 *Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:*

$$1)\ a_n=\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4.\quad 2)\ a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n+k}.$$

$$3)\ a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k^2}{n^2}}.\quad 4)\ a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}.$$

9.18 *Să se calculeze, aplicând formula lui Leibniz-Newton:*

$$1)\ \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx.\quad 2)\ \int_{-x}^{x}e^t dt.\quad 3)\ \int_0^x\cos t\,dt.$$

$$4)\ \int_0^1\frac{x}{x^2+3x+2}\,dx.\quad 5)\ \int_1^4\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx.\quad 6)\ \int_{-2}^{-1}\frac{x}{x^2+4x+5}\,dx.$$

$$7)\ \int_0^1\frac{x^3}{x^8+1}\,dx.\quad 8)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{ctg}x\,dx.\quad 9)\ \int_0^1\operatorname{ch}x\,dx.$$

R: 1) $\ln 2$. 2) e^x-e^{-x}. 3) $\sin x$. 4) $2\ln 3-3\ln 2$. 5) $\dfrac{7}{4}$. 6) $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}\pi$. 7) $\dfrac{1}{16}\pi$. 8) $\dfrac{1}{2}\ln 3$. 9) $\dfrac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)$.

9.19 *Să se arate că:*

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\ \text{şi că}\ I_n=\frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

9.20 *Să se găsească o formulă de recurenţă pentru integrala:*

$$J_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx.$$

R: Efectuând schimbarea de variabilă $x = \sin t$, se obţine $J_n = I_{2n+1}$, de unde: $J_n = \dfrac{2n}{2n+1} J_{n-1}$.

9.21 *Să se calculeze:*

$$1)\ \int_0^1 x^2 e^x dx.\ 2)\ \int_a^b \sqrt{(x-a)(x-b)}dx.\ 3)\ \int_0^\pi x^2 \cos x\, dx.$$
$$4)\ \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.\ 5)\ \int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.\ 6)\ \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx.$$
$$7)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)\, dx.\ 8)\ \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\, dx.\ 9)\ \int_0^\pi x^2 \sin^2 x\, dx.$$

R: 1) $e-2$. 2) $\dfrac{\pi}{8}(b-a)^2$. 3) -2π. 4) $\sqrt{2}-1+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.
5) $\operatorname{arctg} e - \dfrac{1}{4}\pi$. 6) $\dfrac{98}{3}$. 7) $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$. 8) $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{2}-1+\ln 2\right)$. 9) $\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{\pi}{4}$.

9.22 *Să se calculeze:*

$$1)\ \int_0^2 e^x \max\left\{1, x^2\right\}\, dx.\ 2)\ \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.\ 3)\ \int_{-2}^2 \min\{x-1, x+1\}\, dx.$$
$$4)\ \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx.\ 5)\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}.\ 6)\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\, dx.$$

R: 1) $2e^2-e$. 2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 3) 2. 4) $1-\cos 1$. 5) $\dfrac{\pi}{6}$. 6) $2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)$.

9.23 *Să se calculeze:*

$$1)\ I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(2-\cos^2 x)(e^x+1)}\, dx.\ 2)\ I = \int_0^{2n\pi} \sin(x+\sin x)\, dx,\ n\in \mathbf{N}^*.$$

R: 1) Avem, succesiv:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos x}{\left(1+\sin^2 x\right)(e^x+1)}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(1+\sin^2 x\right)(e^x+1)}\, dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx = \operatorname{arctg}\, (\sin x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2) Efectuăm schimbarea de variabilă: $x = t + n\pi$ şi obţinem succesiv:

$$I = \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin\left[t+n\pi+\sin(t+n\pi)\right]\, dt = \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin\left[n\pi + \left(t+(-1)^n \sin t\right)\right]\, dt =$$
$$= (-1)^n \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin\left[t+(-1)^n\sin t\right]\, dt = 0,$$

deoarece integrantul este o funcţie impară.

9.24 *Să se arate că:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{1-\cos kx}{1-\cos x}\,dx=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

R: Notăm $I(k)=\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{1-\cos kx}{1-\cos x}\,dx$. Se constată că:

$$I(k+1)+I(k-1)=2I(k)+2\int_{\varepsilon}^{\pi}\cos kx\,dx,$$

de unde: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[I(k+1)-2I(k)+I(k-1)\right]=0$. Cum $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I(1)=\pi$, presupunând că $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I(k-1)=(k-1)\pi$ şi $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I(k)=k\pi$, rezultă prin inducţie, că $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I(k+1)=(k+1)\pi$.

9.25 *Să se calculeze integrala:*

$$I_{m,n}=\int_{a}^{b}(x-a)^{m}(b-x)^{n}\,dx,\ \text{cu } m,n\in\mathbf{N}.$$

R: Integrând prin părţi, se obţine formutla de recurenţă: $I_{m,n}=\frac{m}{n+1}\cdot I_{m-1,n+1}$, de unde rezultă:

$$I_{m,n}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}(b-a)^{n+m+1}.$$

9.26 *Dacă $a<b$ şi $n\in\mathbf{N}^{*}$, să se arate că:*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{a}^{b}(x-a)^{n}(b-x)^{n}\,dx\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}(b-a)^{2}.$$

R: Din exerciţiul precedent avem că:

$$I_{n,n}=\frac{(n!)^{2}}{(2n+1)!}(b-a)^{2n+1},$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_{n,n}}=(b-a)^{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^{2}}{(2n+1)!}}=\frac{1}{4}(b-a)^{2}.$$

9.27 *Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că:*

$$\int_{0}^{\pi}x\cdot f(\sin x)\,dx=\pi\cdot\int_{0}^{\pi}f(\sin x)\,dx.$$

R: Intr-adevăr,

$$\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot f(\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot f(\sin x)\,dx.$$

Efectuând în cea de-a doua integrală schimbarea de variabilă: $x=\pi-t$, obţinem:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cdot f(\sin x)\,dx=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot f(\sin x)\,dx.$$

9.28 *Fie $f:[0,a]\to\mathbf{R}_+^*$ o funcţie integrabilă. Să se arate că:*

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx=\frac{a}{2}.$$

R: Fie:

$$I(a)=\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx \text{ şi } J(a)=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx.$$

Evident: $I(a)+J(a)=a$. Efectuând în integrala $J(a)$ schimbarea de variabilă $x=a-t$, obţinem că $J(a)=I(a)$. Deci, $I(a)=\dfrac{a}{2}$.

9.29 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x}+(\sin x)^{\cos x}}\,dx.\quad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+\sin x}{\sin x+\cos x+1}\,dx.$$

R: 1) Fie $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$. Atunci, $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=(\sin x)^{\cos x}$ şi conform exerciţiului precedent valoarea integralei este $\dfrac{\pi}{4}$. 2) Fie $f(x)=\sin^2 x+\sin x$. Atunci, $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos^2 x+\cos x$ şi deci valoarea integralei este $\dfrac{\pi}{4}$.

9.30 *Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f(x)+f(-x)=\pi$, pentru orice $x\in[-1,1]$. Să se calculeze integrala:*

$$I=\int_0^{(2n+1)\pi} f(\cos x)\,dx.$$

R: Efectuăm schimbarea de variabilă: $x=(2n+1)\pi-t$. Obţinem:

$$I=\int_0^{(2n+1)\pi} f(-\cos t)\,dt.$$

Dar: $f(-\cos t)=\pi-f(\cos t)$ şi deci $I=\dfrac{2n+1}{2}\pi^2$.

9.31 *Fie $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ o funcţie continuă strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$ şi $f(0) = 0$. Să se stabilească inegalitatea lui Young:*

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy \geq ab,\ \forall a, b \in \mathbf{R}_+.$$

R: Fie S_x aria suprafeţei cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreapta $x = a$ şi S_y aria suprafeţei cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Oy şi dreapta $y = b$. Evident: $S_x + S_y \geq ab$, de unde inegalitatea cerută.

9.32 *Fie $F(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} dt$. Să se calculeze $F'(x)$.*

R: Notăm cu $G(t)$ o primitivă a funcţiei e^{t^2}, deci a.î. $G'(t) = e^{t^2}$. Atunci:

$$F(x) = G(t)|_0^{x^3} = G\left(x^3\right) - G(0),\ \text{de unde: } F'(x) = 3x^2 G'(x) = 3x^2 e^{x^6}.$$

9.33 *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbf{R}$, definită prin: $f(x) = \int_0^{\operatorname{arctg} x} e^{\operatorname{tg}^2 t} dt$. Să se calculeze $f'(x)$ şi să se arate că:*

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}}\,dx + \frac{1}{2e}\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}.$$

R: Se constată că $f(0) = 0$ şi $f'(x) = \dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$. Integrând prin părţi, avem:

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\, f(x)\, e^{-x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2} f'(x)\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{f(1)}{2e}.$$

9.34 *Fie $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$, $x > 0$. Să se calculeze $f'(x)$.*

R: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x^2}$.

9.35 *Să se determine funcţiile derivabile $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, care verifică relaţia:*

$$x + \int_0^x f(t)\,dt = (x+1)\,f(x).$$

R: $f(0) = 0$ şi prin derivarea relaţiei date, obţinem: $1 + f(x) = [(x+1)\,f(x)]'$, de unde: $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Deci $f(x) = \ln(1+x)$.

9.36 *Fără a calcula efectiv integrala, să se arate că:*

$$0 \leq \int_0^1 \ln \frac{e^x + 1}{2}\,dx \leq \ln \frac{e+1}{2}.$$

R: Fie $f(x) = \ln \dfrac{e^x + 1}{2}$. Din: $f'(x) > 0$ pe $\mathbf{R}$, rezultă: $f(0) < f(x) < f(1)$ etc.

9.37 *Fie $f : [0,1] \to [a,b]$ o funcţie continuă pe $[0,1]$. Să se arate că dacă:*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0,\ \textit{atunci}\ \int_0^1 f^2(x)\,dx \le -ab.$$

R: Se integrează pe $[0,1]$ inegalitatea: $[f(x) - a][f(x) - b] \le 0$.

9.38 *Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivată continuă, a.î.*

$$f'(x) \ge 1 + f^2(x),\ \forall x \in [a,b].$$

Să se arate că: $b - a < \pi$.

R: Se integrează pe $[a,b]$ inegalitatea:

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} \ge 1,\ \forall x \in [a,b]$$

şi se ţine seama de faptul că: $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$.

9.39 *Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi periodică, de perioadă T, atunci:*

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt,\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

R: Fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$. Deoarece $F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, rezultă că $F(x) = C$. Pentru $x = 0$ obţinem $C = \int_0^T f(t)\,dt$.

9.40 *Fie $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}\,dx$. Se cere:*

1) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ are loc inegalitatea: $0 \le I_n \le \dfrac{1}{2n+1}$.

2) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

3) Folosind identitatea:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{2n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n}}{1+x},$$

să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

9.41 *Fie $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Să se arate că există $c \in (0,1)$ a.î.*

$$P(c) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1}.$$

R: Aplicăm prima formulă de medie integralei $\int_0^1 P(x)\ dx$.

9.42 *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă care satisface condiţia:*

$$6\int_0^1 f(x)\ dx = 2a+3b+6c.$$

Să se arate că există $x_0\in(0,1)$ *a.î.* $f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c$.

R: Fie $g:[0,1]\to\mathbf{R}$ definită prin: $g(x)=6\left[f(x)-ax^2+bx+c\right]$. Se constată imediat că $\int_0^1 g(x)\ dx=0$. Pe de altă parte, din teorema de medie, rezultă că există $x_0\in(0,1)$ a.î. $\int_0^1 g(x)\ dx = g(x_0)$.

9.43 *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie continuă care satisface condiţia:* $\int_0^1 f(x)\ dx=\dfrac{1}{3}$. *Să se arate că există* $c\in(0,1)$ *a.î.* $f(c)=c^2$.

R: Condiţia din enunţ se mai scrie: $\int_0^1\left[f(x)-x^2\right]\ dx=0$ şi se aplică teorema de medie.

9.44 *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie derivabilă, cu derivată continuă pe* $[0,1]$. *Să se arate că există* $c\in(0,1)$ *a.î.*

$$\int_0^1 f(x)\ dx = f(0)+\frac{1}{2}f'(c).$$

R: Avem:

$$\int_0^1 f(x)\ dx = (x-1)\,f(x)\big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)\,f'(x)\ dx,$$

dar, conform formulei de medie, există $c\in(0,1)$ a.î.

$$\int_0^1 (x-1)\,f'(x)\ dx = f'(c)\int_0^1 (x-1)\ dx = -\frac{1}{2}f'(c).$$

9.45 *Fie* $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ *o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata* f'' *continuă pe* $[0,1]$. *Să se arate că există* $c\in(0,1)$ *a.î.*

$$\int_0^1 f(x)\ dx = f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{6}f''(c).$$

R: Se integrează de două ori prin părţi şi se aplică teorema de medie.

9.46 *Să se determine funcţiile continue* $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ *care verifică egalitatea*

$$\sin\left(\int_0^x f(t)\ dt\right) = \frac{x}{1+x},\ x>0.$$

R: Din egalitatea dată rezultă:

$$\int_0^x f(t)\ dt = \arcsin \frac{x}{1+x},\ \text{de unde}\ f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}}.$$

9.47 *Fie* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă pe* $[a,b]$. *Să se arate că există* $c \in (a,b)$ *pentru care:*

$$a\int_a^c f(x)\ dx + b\int_c^b f(x)\ dx = \int_a^b xf(x)\ dx.$$

R: Fie funcţia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$, definită prin: $F(t) = \int_a^t f(x)\ dx$, derivabilă cu $F'(t) = f(t)$, $\forall x \in [a,b]$. Avem, succesiv:

$$\int_a^b xf(x)\ dx = \int_a^b xF'(x)\ dx = xF(x)\big|_a^b - \int_a^b F(x)\ dx = b\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b F(x)\ dx.$$

Conform teoremei de medie există $c \in (a,b)$ a.î. $\int_a^b F(x)\ dx = (b-a)F(c)$.

9.48 *Fie* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *o funcţie continuă pe* $[0,1]$ *pentru care există* $n \in \mathbf{N}^*$ *a.î.*

$$\int_0^1 f(x)\ dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Să se arate că există $x_0 \in (0,1)$ *a.î.* $f(x_0) = \dfrac{1-x_0^n}{1-x_0}$.

R: Fie $g : [0,1] \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$g(x) = f(x) - \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right).$$

Se constată imediat că $\int_0^1 g(x)\ dx = 0$, deci după teorema de medie există $x_0 \in (0,1)$ a.î. $g(x_0) = 0$.

9.3 Integrale improprii

9.49 *Să se studieze natura şi în caz de convergenţă să se calculeze integralele improprii:*

$$1)\ I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n},\ a>0,\ n \in \mathbf{N}^*.\ \ 2)\ I_n = \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,\ a>0,\ n \in \mathbf{N}.$$

R: 1) Aplicăm **Criteriul I.** Deoarece $|f(x)|\,x^{2n} = \dfrac{x^{2n}}{\left(a^2+x^2\right)^n} \le 1$, $\forall x \in (0,\infty)$, cum $\alpha = 2n > 1$ şi $M = 1$, rezultă că integrala este convergentă. Avem apoi:

$$I_1 = \frac{\pi}{2a},\ \ I_n = \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2(n-1)}\,I_{n-1},\ n \ge 2.$$

2) Aplicăm **Criteriul II.** Deoarece $|f(x)|(a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^n}{\sqrt{a+x}} \leq \frac{a^n}{\sqrt{a}}$, $\forall x \in (0,a)$, cum $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ şi $M = \frac{a^n}{\sqrt{a}}$, rezultă că integrala este convergentă. Avem apoi:

$$I_1 = \frac{\pi}{2},\ \ I_n = a^2 \frac{n-1}{n} I_{n-1},\ n \geq 2.$$

9.50 *Să se studieze natura şi în caz de convergenţă să se calculeze integralele improprii:*

$$1)\ I = \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.\ \ 2)\ I = \int_a^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx,\ a>0.\ \ 3)\ I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx.$$

R: 1) Scriem integrala ca sumă de două integrale, una pe intervalul $\left[1,\sqrt{2}\right]$ şi a doua pe intervalul $[\sqrt{2},\infty)$. Pentru prima integrală $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, $M = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pentru a doua integrală $\alpha = 2 > 1$, $M = \sqrt{2}$, deci ambele integrale sunt convergente. Se obţine $I = \frac{\pi}{2}$. 2) Convergentă şi $I = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+1}{a^2-1}$. 3) Convergentă pentru $\alpha > 1$ şi $I = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$, divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

9.51 *Să se studieze natura şi în caz de convergenţă să se calculeze integralele improprii:*

$$1)\ I = \int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}.\ \ 2)\ I = \int_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}.\ \ 3)\ I = \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx.$$

R: 1) Convergentă şi $I = \ln 2$. 2) Convergentă şi $I = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$. 3) Divergentă.

9.52 *Să calculeze integralele:*

$$1)\ I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x}.\ \ 2)\ I = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x}.$$

R: 1) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \pi + u$ şi obţinem:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{4+3\cos u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2+7} = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.$$

2) Scriind integrala ca sumă a două integrale, una pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi a doua pe $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ cu schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} x$, se obţine:

$$I = 2\int_0^\infty \frac{1+t^2}{t^4+t^2+1}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

9.53 *Să calculeze integralele:*

$$1)\ I_n = \int_0^\infty e^{-x}x^n dx.\ \ 2)\ I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.\ \ 3)\ I = \int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

4) $I=\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$. 5) $I=\int_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. 6) $I=\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

7) $I=\int_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$. 8) $I=\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 9) $I=\int_0^1 \ln(1-x)\,dx$.

R: 1) $I_n=nI_{n-1}$, deci $I_n=n!$. 2) Deoarece $\left|\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right| x^3<\frac{\pi}{2}$, $\forall x\,(0,\infty)$, integrala este convergentă. Integrând prin părţi, obţinem: $I=\frac{\pi}{2}-1$. 3) $I=-\frac{1}{8}$. 4) $I=\pi$.

5) $I=6-9\ln\sqrt{3}$. 6) $I=\frac{1}{4}(\pi+2)$. 7) $I=\frac{\pi}{2}(a+b)$. 8) $I=2$. 9) $I=1$.

9.54 *Să calculeze integralele:*

1) $I=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$, $\alpha>0$. 2) $I=\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. 3) $I=\int_3^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

4) $I=\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$. 5) $I=\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$. 6) $I=\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

7) $I=\int_1^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$. 8) $I=\int_2^4 \frac{3+\cos x}{(x-2)^2}\,dx$. 9) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$.

R: 1) $I=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$. 2) $I=1$. 3) $I=\frac{33\pi}{2}$. 4) $I=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 5) $I=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
6) Divergentă. 7) Divergentă. 8) Divergentă.
9) Efectuăm schimbarea de variabilă $x=\frac{\pi}{2}-2t$ şi obţinem:

$$I=2\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt.$$

In ultima integrală efectuăm schimbarea de variabilă $t=\frac{\pi}{2}-u$. Rezultă $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

9.55 *Fie $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă pe $[0,\infty)$ şi integrala improprie (*integrala lui Froullani*):*

$$I=\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx,\ o<a<b.$$

1) Să se arate că dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k\in\mathbf{R}$, atunci integrala I este convergent şi $I=[f(0)-k]\ln\frac{b}{a}$.

2) Dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu este finită, dar $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ este convergentă pentru orice $\alpha>0$, atunci integrala I este convergentă şi $I=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

R: 1) Pentru orice $[t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ avem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(bx)}{x} dx =$$

$$= \int_{at_1}^{at_2} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bt_1}^{bt_2} \frac{f(u)}{u} du = f(c_1) \int_{at_1}^{bt_1} \frac{du}{u} - f(c_2) \int_{at_2}^{bt_2} \frac{du}{u} = [f(c_1) - f(c_2)] \ln \frac{b}{a},$$

cu $c_1 \in [at_1, bt_1]$ şi $c_1 \in [at_2, bt_2]$. Dacă $t_1 \to 0$ şi $t_2 \to \infty$, atunci $c_1 \to 0$ şi $c_2 \to \infty$, deci: $f(c_1) \to f(0)$, iar $f(c_2) \to k$.

2) Fie $F : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ o primitivă a funcţiei $\dfrac{f(x)}{x}$ pe $(0, \infty)$. Pentru orice $t \in (0, \infty)$, avem:

$$\begin{aligned} \int_{t}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{at}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bt}^{\infty} \frac{f(u)}{u} du = F(bt) - F(at) = \\ &= \int_{at}^{bt} \frac{f(u)}{u} du = f(c) \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

cu $c \in [at, bt]$. Dacă $t \to 0$, atunci $c \to 0$, deci: $f(c) \to f(0)$.

9.56 *Folosind integrala lui Froullani, să se calculeze:*

1) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx,\ a, b > 0.$ 2) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}} dx,\ a, b, p, q > 0.$

3) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x} dx,\ ab \neq 0.$ 4) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx,\ a, b > 0.$

5) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx,\ a, b > 0.$ 6) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} dx.$

R: 1) $I = \ln \dfrac{b}{a}$. 2) $I = \ln \dfrac{p+q}{p} \ln \dfrac{b}{a}$. 3) $I = \ln \left| \dfrac{b}{a} \right|$.
4) $I = 0$. 5) $I = \ln \dfrac{b}{a}$. 6) $I = \dfrac{\pi}{2} \ln \dfrac{a}{b}$.

9.57 *Să se calculeze* integrala lui Euler-Poisson*: $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.*

R: Pe intervalul $(1, \infty)$ avem: $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx < \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \dfrac{1}{e}$, iar pe intervalul $[0, 1]$ avem o integrală definită. Deci integrala dată este convergentă. Observăm că pentru $x > 0$ are loc egalitatea: $\int_0^{\infty} xe^{-x^2y^2} dy = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = I$. Putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned} I^2 &= I \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} Ie^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} xe^{-x^2y^2} dy \right) e^{-x^2} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} xe^{-x^2(y^2+1)} dx \right] dy. \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de variabilă $t = x^2\left(y^2+1\right)$, obţinem:

$$I^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2+1}\int_0^\infty e^{-t}dt\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă că $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9.58 *Să se calculeze* integralele lui Fresnel*:*

$$I_c = \int_0^\infty \cos x^2 dx,\quad I_s = \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

R: Efectuând schimbarea de variabilă $t = x^2$, obţinem:

$$I_c = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt,\quad I_s = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt,$$

care sunt convergente. Putem însă scrie:

$$I_c - iI_s = \int_0^\infty \left(\cos x^2 - i\sin x^2\right)dx = \int_0^\infty e^{-ix^2}dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $ix^2 = u^2$, găsim: $I_c - iI_s = \dfrac{1}{2}\left(1-i\right)\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, de unde:

$$I_c = I_s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

9.4 Integrale cu parametri

9.59 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ I\left(y\right) = \int_0^y \frac{\ln\left(1+xy\right)}{1+x^2}\,dx.\ \ 2)\ I\left(m,n\right) = \int_0^1 x^m \ln^n x\,dx.$$

R: 1) Deoarece:

$$I'\left(y\right) = \frac{\ln\left(1+y^2\right)}{1+y^2} + \int_0^y \frac{x}{\left(1+xy\right)\left(1+x^2\right)}\,dx = \frac{\ln\left(1+y^2\right)}{2\left(1+y^2\right)} + \frac{y}{1+y^2}\operatorname{arctg} y,$$

prin integrare, obţinem:

$$I\left(y\right) = \int_0^y \left[\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{2\left(1+t^2\right)} + \frac{t}{1+t^2}\operatorname{arctg} t\right]dt = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} y\right)\ln\left(1+y^2\right).$$

2) Derivând egalitatea $\int_0^1 x^m dx = \dfrac{1}{m+1}$ de n ori în raport cu m, găsim

$$I\left(m,n\right) = \left(-1\right)!\frac{n!}{\left(m+1\right)^{n+1}}.$$

9.60 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ I_n(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}},\ y>0,\ n\in\mathbf{N}.\ 2)\ I(k,y) = \int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin(xy)}{x}\,dx.$$

R: 1) Avem succesiv:

$$I_0(y) = \frac{\pi}{2\sqrt{y}},\ I_1(y) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2y\sqrt{y}},\ \ldots,\ I_n(y) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\cdot\frac{\pi}{2y^n\sqrt{y}}.$$

2) Pentru $k\neq 0$, derivând în raport cu y şi integrând de două ori prin părţi, avem:

$$I'(k,y) = \int_0^\infty e^{-kx}\cos(xy)\,dx = \frac{k}{k^2+y^2}.$$

Deci, $I(k,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{k}$. Pentru $k=0$, avem:

$$I(0,y) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & y<0,\\ 0, & y=0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & y>0.\end{cases}$$

9.61 *Să se calculeze integralele:*

1) $I(y) = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}\,dx,\ y>0.$

2) $I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(y\sin x)\,dx.$

3) $I(y) = \int_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

4) $I(y) = \int_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}\,dx.$

R: 1) Derivând în raport cu y, avem:

$$I'(y) = -2\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}\frac{y}{x^2}\,dx = -2\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{z^2}-z^2}\,dz = -2I(y),$$

în urma schimbării de variabilă $x=\frac{y}{z}$. De aici rezultă: $I(y)=Ce^{-2y}$. Pentru $y=0$, obţinem $C = I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Deci $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2y}$. 2) $I(y) = \frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$.

3) $I(y) = \frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$. 4) $I(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y)$.

9.62 *Să se calculeze integralele:*

$$1)\ I(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\alpha^2\sin^2 x+\beta^2\cos^2 x\right)dx,\ \alpha,\beta>0.$$

$$2)\ I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\frac{dx}{\cos x},\ |y|<1.\ 3)\ I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(y^2-\sin^2 x\right)dx,\ y>1.$$

R: 1) $I(\alpha,\beta) = \pi \ln \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. 2) $I(y) = \pi \arcsin y$. 3) $I(y) = \pi \ln \dfrac{y+\sqrt{y^2-1}}{2}$.

9.63 *Să se arate că* integrala lui Euler de speţa a doua*:*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p \in \mathbf{R}.$$

este convergentă pentru $p > 0$ şi divergentă pentru $p \leq 0$. Să se stabilească relaţiile: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, *pentru* $p > 0$ *şi* $\Gamma(n+1) = n!$.

R: Putem scrie:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx.$$

Prima integrală este convergentă dacă $1-p<1$, adică $p>0$, fiind improprie de speţa a doua, cu $e^{-1} < x^{1-p}\left(x^{p-1}e^{-x}\right) \leq 1$, pe $[0,1]$. A doua integrală este convergentă pentru orice p, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha\left(x^{p-1}e^{-x}\right) = 0$, $\forall p \in \mathbf{R}$.

9.64 *Să se arate că* integrala lui Euler de prima speţă*:*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p,q \in \mathbf{R},$$

este convergentă pentru $p > 0$ şi $q > 0$ şi divergentă pentru $p \leq 0$ sau $q \leq 0$. Să se stabilească relaţiile:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ p,q>0 \text{ şi } B(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!},\ m,n \in \mathbf{N}^*.$$

R: Putem scrie:

$$B(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Fie m_1, M_1 marginile funcţiei $(1-x)^{q-1}$ pe $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. Atunci:

$$0 < m_1 \leq x^{1-p}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right] \leq M_1.$$

Rezultă că prima integrală este convergentă dacă $p>0$, $\forall q \in \mathbf{R}$. Fie apoi m_2, M_2 marginile funcţiei x^{p-1} pe $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$. Atunci:

$$0 < m_2 \leq^{p-1} (1-x)^{1-q}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right] \leq M_2.$$

Rezultă că a doua integrală este convergentă dacă $q>0$, $\forall p \in \mathbf{R}$. Deci $B(p,q)$ este convergentă dacă $p>0$ şi $q>0$.

Capitolul 10

Integrale curbilinii

10.1 Lungimea unui arc de curbă

10.1 *Să se calculeze lungimile următoarelor drumuri:*

$$
\begin{array}{l}
1)\ x = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right), \ \ y = \sqrt{1+t^2}, \ \ t \in [0,1]. \\
2)\ x = a\cos^3 t, \ \ y = a\sin^3 t, \ \ t \in [0, 2\pi].
\end{array}
$$

R: 1) Avem $x'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, deci

$$L = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}}\, dt = \int_0^1 dt = 1.$$

2) Avem $x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$ şi $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$, deci

$$L = 3a\int_0^{2\pi} |\sin t\cos t|\, dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = 6a.$$

10.2 *Să se calculeze lungimile următoarelor drumuri:*

$$
\begin{array}{rcl}
1)\ x & = & \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}, \ \ y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}}, \ \ t \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]. \\
2)\ x & = & 5\sin t - \sin 5t, \ \ y = 5\cos t - \cos 5t, \ \ t \in [0, 2\pi].
\end{array}
$$

R: 1) Avem $x'(t) = \dfrac{1}{\sin t}$, $y'(t) = \dfrac{1}{\cos t}$. Atunci

$$L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}}\, dt = \ln 3.$$

2) Avem $x'(t) = 5\cos t - 5\cos 5t$, $y'(t) = -5\sin t - 5\sin 5t$, deci

$$L = 5\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 3t}\,dt = 10\int_0^{2\pi}|\sin 3t|\,dt = 60\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3t\,dt = 40.$$

10.3 *Să se calculeze lungimile următoarelor drumuri:*

1) $x = e^{at}(a\sin bt - b\cos bt)$, $y = e^{at}(a\cos bt + b\sin bt)$, $t \in [0,1]$, $a, b > 0$.
2) $x = \frac{t}{2}[\sin(\ln t) - \cos(\ln t)]$, $y = \frac{t}{2}[\sin(\ln t) + \cos(\ln t)]$, $t \in [1,2]$.
3) $x = \left(3t^2 - 6\right)\sin t - \left(t^3 - 6t\right)\cos t$, $y = \left(3t^2 - 6\right)\cos t + \left(t^3 - 6t\right)\sin t$,

$t \in [-2\pi, 2\pi]$.

R: 1) $L = \dfrac{a^2+b^2}{a}(e^a - 1)$. 2) $L = 1$. 3) $L = 8\pi^4$.

10.4 *Să se calculeze lungimile următoarelor drumuri:*

1) $\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2}\ln(\cos t), \\ z = \operatorname{tg} t - t, \end{cases}$ $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. 2) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \operatorname{ctg} t, \\ z = \sqrt{2}\ln(\operatorname{tg} t), \end{cases}$ $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

R: 1) $L = 2$. 2) $L = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

10.2 Integrale curbilinii de primul tip

10.5 *Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip, pe arcele de curbă $\mathcal{C}$, indicate:*

1) $I = \int_{\mathcal{C}} xy\,ds$, $(\mathcal{C})$ $x = t$, $y = t^2$, $t \in [-1,1]$.
2) $I = \int_{\mathcal{C}} y^2 ds$, $(\mathcal{C})$ $x = -\frac{1}{4}t^4$, $y = t$, $t \in [0,2]$.
3) $I = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{y(2-y)}\,ds$, $(\mathcal{C})$ $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4) $I = \int_{\mathcal{C}} x^2y^2 ds$, $(\mathcal{C})$ $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

R: 1) Deoarece $ds = \sqrt{1+4t^2}dt$, avem

$$I = \int_{-1}^{1} t^3\sqrt{1+4t^2}\,dt = 0,$$

integrantul fiind o funcţie impară şi intervalul de integrare este simetric faţă de origine.
2) Deoarece $ds = \sqrt{t^6+1}\,dt$, avem

$$I = \int_0^2 t^2\sqrt{t^6+1}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^8\sqrt{u^2+1}\,du = \frac{4}{3}\sqrt{65} + \frac{1}{6}\ln\left(8+\sqrt{65}\right).$$

3) Deoarece $ds = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 2\sin\dfrac{t}{2}\, dt$, avem

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin\frac{t}{2}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\, dt = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

4) Obţinem:

$$I = \frac{3a^5}{2^7}\int_0^{2\pi} |\sin 2t|^7\, dt = \frac{3a^5}{2^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 2t\, dt,$$

deoarece funcţia $|\sin 2t|^7$ este periodică, de perioadă $\dfrac{\pi}{2}$. Efectuăm schimbarea de variabilă $u = \cos 2t$ şi obţinem:

$$I = \frac{3a^5}{2^6}\int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right)^3\, du = \frac{3}{70}a^5.$$

10.6 *Să se calculeze integrala curbilinie* $I = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds$*, unde* $\mathcal{C}$ *este cercul de ecuaţie* $x^2+y^2 = ax$*.*

R: O reprezentare parametrică a cercului $\mathcal{C}$ este: $x = \dfrac{a}{2}(1+\cos t)$, $y = \dfrac{a}{2}\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Se obţine $I = 2a^2$.

10.7 *Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip, pe arcele de curbă* $\mathcal{C}$*, indicate:*

1) $I = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\, ds,\ \ (\mathcal{C})\ \ x = r(\cos t + t\sin t),\ y = r(\sin t - t\cos t),\ t\in[0,2\pi].$
2) $I = \int_{\mathcal{C}} \left(x^2+y^2\right)^n ds,\ \ (\mathcal{C})\ \ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t\in[0,2\pi].$
3) $I = \int_{\mathcal{C}} |xy|\, ds,\ \ (\mathcal{C})\ \ x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ a,b>0,\ t\in[0,4\pi].$

R: 1) $I = \dfrac{r^2}{3}\left[\left(\sqrt{1+4\pi^2}\right)^3 - 1\right]$. 2) $I = 2\pi a^{2n+1}$. 3) $I = \dfrac{8ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}$.

10.8 *Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip, pe arcele de curbă* $\mathcal{C}$*, indicate:*

1) $I = \int_{\mathcal{C}} \left(x^2+y^2\right)\ln z\, ds,\ \ (\mathcal{C})\ \ x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t,\ t\in[0,1].$
2) $I = \int_{\mathcal{C}} \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} ds,\ \ (\mathcal{C})\ \ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t\in[0,2\pi].$
3) $I = \int_{\mathcal{C}} xy^2z\, ds,\ \ (\mathcal{C})\ \ x = t,\ y = \dfrac{1}{3}\sqrt{8t^3},\ z = \dfrac{1}{2}t^2,\ t\in[0,1].$
4) $I = \int_{\mathcal{C}} \left(x^2+y^2\right) z\, ds,\ \ (\mathcal{C})\ \ x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t\in[0,1].$

R: 1) Deoarece $ds = \sqrt{3}e^t dt$, rezultă $I = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\left(2e^3+1\right)$. 2) $I = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\dfrac{2\pi b}{a}$. 3) $I = \dfrac{5}{42}$. 4) $I = \dfrac{4\sqrt{3}}{5} + \dfrac{8\sqrt{2}}{15}$.

10.9 *Să se calculeze integrala curbilinie* $I = \int_{\mathcal{C}} (x+y+z)\, ds$*, unde* $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$*, cu:*

$$(\mathcal{C}_1)\ \begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \quad t\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ z = 0, \end{cases} \quad (\mathcal{C}_2)\ \begin{cases} x = 0, \\ y = r - t, \quad t\in[0,r]. \\ z = t, \end{cases}$$

R: $I = \left(2+\sqrt{2}\right) r^2$.

10.10 *Să se calculeze integrala curbilinie* $I = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{2y^2+z^2}\, ds$, *unde* $\mathcal{C}$ *este cercul de ecuaţie* $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x$.

R: O reprezentare parametrică a curbei este: $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t$, $y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t$, $z = a\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Se obţine: $I = 2\pi a^2$.

10.11 *Să se calculeze masa* $\mathcal{M}$ *firului material cu densitatea liniară* $\rho(x,y) = 1+x$, *care este imaginea curbei:*

$$(\mathcal{C})\;\; x = t,\; y = \frac{1}{2}t^2,\; t \in [0,1].$$

R: Deoarece $ds = \sqrt{1+t^2}\, dt$, avem

$$\mathcal{M} = \int_0^1 (1+t)\sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{7}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{3}.$$

10.12 *Să se calculeze masele firelor materiale care au densităţile liniare şi reprezentările parametrice următoare:*

$$\begin{array}{l}
1)\; \rho(x,y,z) = \sqrt[4]{2y},\;\; (\mathcal{C})\;\; x = \frac{3}{8}t^8,\; y = \frac{1}{2}t^8,\; z = \frac{\sqrt{11}}{3}t^3,\; t \in [0,1].\\
2)\; \rho(x,y,z) = \sqrt{2y},\;\; (\mathcal{C})\;\; x = t,\; y = \frac{1}{2}t^2,\; z = \frac{1}{3}t^3,\;\; t \in [0,1].\\
3)\; \rho(x,y,z) = x,\;\; (\mathcal{C})\;\; x = \operatorname{ch} t,\; y = \operatorname{sh} t,\; z = t,\; t \in [0, \ln 2].
\end{array}$$

R: 1) $\mathcal{M} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{11}{100}\ln 11$. 2) $\mathcal{M} = \dfrac{1}{8}\left[3\sqrt{3} - 1 + \dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$.
3) $\mathcal{M} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{15}{16} + \ln 2\right)$.

10.13 *Să se calculeze masa* $\mathcal{M}$ *şi centrul de greutate* G *ale firelor materiale cu densităţile liniare şi reprezentările parametrice următoare:*

$$\begin{array}{l}
1)\; \rho(x,y) = 1,\;\; (\mathcal{C})\;\; x = R\cos t,\; y = R\sin t,\; R > 0,\; t \in [0,\pi].\\
2)\; \rho(x,y) = 1,\;\; (\mathcal{C})\;\; x = R(t - \sin t),\; y = R(1-\cos t),\; R > 0,\; t \in [0,\pi].\\
3)\; \rho(x,y) = \sqrt{y},\;\; (\mathcal{C})\;\; x = R(t - \sin t),\; y = R(1-\cos t),\; R > 0,\; t \in [0,2\pi].\\
4)\; \rho(x,y) = 1,\;\; (\mathcal{C})\;\; x = R\cos^3 t,\; y = R\sin^3 t,\; R > 0,\; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].
\end{array}$$

R: 1) $\mathcal{M} = \pi R$, $G\left(0, \dfrac{2R}{\pi}\right)$. 2) $\mathcal{M} = 4R$, $G\left(\dfrac{4}{3}R, \dfrac{4}{3}R\right)$.
3) $\mathcal{M} = 2R\sqrt{2R}\pi$, $G\left(R\pi, \dfrac{3}{2}R\right)$. 4) $\mathcal{M} = \dfrac{3}{2}R$, $G\left(\dfrac{2}{5}R, \dfrac{2}{5}R\right)$.

10.14 *Să se calculeze masa $\mathcal{M}$ şi centrul de greutate G ale firelor materiale cu densitătăţile liniare şi reprezentările parametrice următoare:*

$$1)\ \rho(x,y,z)=1,\ \ (\mathcal{C})\ \ x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ t\in[0,2\pi].$$
$$2)\ \rho(x,y,z)=\frac{|z|}{2},\ \ (\mathcal{C})\ \ x=4t^5,\ y=\sqrt{15}\,t^4,\ z=2t^3,\ t\in[-1,1].$$

R: 1) $\mathcal{M}=2\pi\sqrt{a^2+b^2}$, $G(0,0,b\pi)$. 2) $\mathcal{M}=7$, $G\left(0,\dfrac{68}{7\sqrt{15}},0\right)$.

10.3 Integrale curbilinii de tipul al doilea

10.15 *Să se calculeze integralele curbilinii de tipul al doilea, pe arcele de curbă $\mathcal{C}$, indicate:*

$$1)\ I=\int_{\mathcal{C}} xy\,dx-y^2dy,\ \ (\mathcal{C})\ \ x=t^2,\ y=t^3,\ t\in[0,1].$$
$$2)\ I=\int_{\mathcal{C}} \sqrt{1-x^2}\,dx+x\,dy,\ \ (\mathcal{C})\ \ x=\cos t,\ y=2\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$
$$3)\ I=\int_{\mathcal{C}} ye^x dx,\ \ (\mathcal{C})\ \ x=\ln\left(1+t^2\right),\ y=2\operatorname{arctg} t-t,\ t\in[0,1].$$
$$4)\ I=\int_{\mathcal{C}} x^2y\,dy-xy^2dx,\ \ (\mathcal{C})\ \ x=\sqrt{\cos t},\ y=\sqrt{\sin t},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

R: 1) Deoarece: $dx=2t\,dt$, $dy=3t^2dt$, avem: $I=\int_0^1\left(2t^6-3t^8\right)\,dt=-\dfrac{1}{21}$.
2) Deoarece: $dx=-\sin t$, $dy=2\cos t\,dt$, obţinem $I=\pi$. 3) $I=\pi-\dfrac{8}{3}$. 4) $I=\dfrac{\pi}{4}$.

10.16 *Să se calculeze integralele curbilinii de tipul al doilea:*

$$1)\ I=\int_{\mathcal{C}} \frac{x^2dy-y^2dx}{x\sqrt[3]{x^2}+y\sqrt[3]{y^2}},\ \ (\mathcal{C})\ \left\{\begin{array}{l} x=r\cos^3 t,\\ y=r\sin^3 t,\end{array}\right.\ \ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$
$$2)\ I=\int_{\mathcal{C}} (\arcsin y)\,dx+x^3dy,\ \ (\mathcal{C})\ \left\{\begin{array}{l} x=-t,\\ y=\sqrt{1-t^2},\end{array}\right.\ \ t\in[-1,1].$$

R: 1) $I=\dfrac{3\pi}{16}r\sqrt[3]{r}$. 2) $I=\dfrac{3\pi}{8}-2$.

10.17 *Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I=\int_{\mathcal{C}}(x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, unde $\mathcal{C}$ este curba simplă, închisă şi orientată pozitiv, care are drept imagine triunghiul cu vârfurile în punctele $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,2)$ şi ambele capete în origine.*

R: Avem: $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2\cup\mathcal{C}_3$, cu: $(\mathcal{C}_1)$ $x=t,\ y=t,\ t\in[0,1]$, $(\mathcal{C}_2)$ $x=2-t,\ y=t,\ t\in[1,2]$, $(\mathcal{C}_3)$ $x=0,\ y=2-t,\ t\in[0,2]$. Incât: $I=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^2(-4+2t)\,dt+\int_0^2(-2+t)\,dt=-2$.

10.18 *Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I=\int_{\mathcal{C}} 2x\,dy-3y\,dx$, unde $\mathcal{C}$ este curba simplă, închisă şi orientată pozitiv, care are drept imagine dreptunghiul cu vârfurile în punctele $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(2,5)$ şi ambele capete în punctul A.*

R: $I=\dfrac{35}{2}$.

10.19 *Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea*

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{dx + dy}{\max\{|x|, |y|\}},$$

unde $\mathcal{C}$ este curba simplă, închisă şi orientată pozitiv, care are drept imagine triunghiul cu vârfurile în punctele $A(-1,-1)$, $B(2,-1)$, $C(2,1)$, $D(-1,1)$ şi ambele capete în punctul A.

R: $I = -1$.

10.20 *Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I = \int_{\mathcal{C}} y dx - (x-a)\, dy$, unde $\mathcal{C}$ este curba simplă, închisă şi orientată pozitiv, care are drept imagine elipsa:*

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$$

şi ambele extremităţi în origine.

R: O reprezentare parametrică a curbei $\mathcal{C}$ este: $x = a(1 + \cos t)$, $y = b \sin t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Se obţine $I = -2\pi ab$.

10.21 *Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I = \int_{\mathcal{C}} \left(x^2 - y^2\right) dx$, unde $\mathcal{C}$ este arcul din parabola $y = x^2$ cuprins între punctele $O(0,0)$ şi $A(2,4)$.*

R: $I = -\dfrac{56}{15}$.

10.22 *Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I = \int_{\mathcal{C}} \left(x - y^2\right) dx + 2xy\, dy$, unde $\mathcal{C}$ este curba simplă, închisă şi orientată pozitiv, care are drept imagine conturul domeniului plan delimitat de curbele: $y^2 = 8x$, $9x^2 + y^2 = 1$ şi $y = 0$, situat în primul cadran.*

R: Vârfurile conturului sunt: $O(0,0)$, $A\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$, $B\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Se obţine $I = -\dfrac{80}{243}$.

10.23 *Să se calculeze integralele curbilinii de tipul al doilea, pe arcele de curbă $\mathcal{C}$, indicate:*

1) $I = \int_{\mathcal{C}} y\, dx - x\, dy + \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz$, $(\mathcal{C})\ \begin{cases} x = -t\cos t + \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t, \quad t \in [0, \pi]. \\ z = t + 1, \end{cases}$

2) $I = \int_{\mathcal{C}} (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$, $(\mathcal{C})\ \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = bt, \end{cases}$

R: 1) Deoarece: $dx = t \sin t\, dt$, $dy = t \cos t\, dt$, $dz = dt$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2t^2 + 2t + 2$, se obţine $I = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi$. 2) $I = -2\pi a(a + b)$.

10.24 *Să se calculeze integralele curbilinii de tipul al doilea, pe arcele de curbă $\mathcal{C}$, indicate:*

1) $I = \int_{\mathcal{C}} x\,dx + xy\,dy + xyz\,dz,\ (\mathcal{C})\ x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = \sqrt{2}\,t,\ t \in [0,1]$.

2) $I = \int_{\mathcal{C}} z\sqrt{a^2 - x^2}\,dx + xz\,dy + \left(x^2 + y^2\right) dz,\ (\mathcal{C}) \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \\ z = bt, \end{cases}$

R: 1) $I = \dfrac{1}{2}e^2 + \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2}$. 2) $I = \dfrac{a^2 b}{2}(\pi - 1)$.

10.25 *Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea*

$$I = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{y^2 + z^2}\,dx + \sqrt{z^2 + x^2}\,dy + \sqrt{x^2 + y^2}\,dz,$$

unde $\mathcal{C}$ este curba simplă care are drept imagine segmentul $[AB]$ cu: $A(-1,-1,-1)$ şi $B(2,2,2)$, iar primul capăt în A.

R: $I = \dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.

10.26 *Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea*

$$I = \int_{\mathcal{C}} (y - 2z)\,dx - (z - x)\,dy + (2x - y)\,dz,$$

unde $\mathcal{C}$ este curba simplă de ecuaţii: $(\mathcal{C}) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$ cu $a > 0$ şi ambele capete în punctul $A\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

R: O reprezentare parametrică a curbei $\mathcal{C}$ este:

$$(\mathcal{C})\ x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t,\ y = \frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t,\ z = \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Se obţine $I = \dfrac{4a^2}{\sqrt{3}}$.

10.4 Independenţa de drum a integralelor curbilinii

10.27 *Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferenţială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:*

1) $I = \int\limits_{(2,1)}^{(1,3)} y\,dx + x\,dy$. 2) $I = \int\limits_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 e^x dx + 2ye^x dy$.

3) $I = \int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} (x + 3y)\,dx + (3x + y)\,dy$. 4) $I = \int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\,dx + x^2 dy$.

R: 1) Cum $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = x$ şi $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1$, rezultă că valoarea integralei nu depinde de curba rectificabilă cu capetele în punctele $(2,1)$ şi $(1,3)$. Fie $A_1(2,1)$, $A_2(1,1)$ şi $A_3(3,1)$. Alegem pentru integrare curba simplă $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, în care $\mathcal{C}_1$ are ca imagine segmentul A_1A_2 paralel cu axa Ox, iar $\mathcal{C}_2$ are ca imagine segmentul A_2A_3 paralel cu axa Oy, având reprezentările parametrice:

$$(\mathcal{C}_1)\ \begin{cases} x = -t, \\ y = 1, \end{cases} t \in [-2,-1] \text{ şi } (\mathcal{C}_2)\ \begin{cases} x = 1, \\ y = t, \end{cases} t \in [1,3].$$

Obţinem: $I = \int_{\mathcal{C}} y\,dx + x\,dy = \int_{\mathcal{C}_1} y\,dx + x\,dy + \int_{\mathcal{C}_2} y\,dx + x\,dy = -\int_{-2}^{-1} dt + \int_1^3 dt = 1$. Se observă uşor că funcţia $U(x,y) = xy$ este o primitivă a expresiei diferenţiale $y\,dx + x\,dy$, adică $dU = dx + x\,dy$ şi deci $I = U(1,3) - U(2,1) = 1$.

2) $I = -4$. 3) $I = \dfrac{41}{2}$. 4) $I = 4$.

10.28 *Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferenţială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:*

$$1)\ I = \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}. \qquad 2)\ I = \int_{\left(\frac{1}{2},2\right)}^{(9,1)} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,dy.$$

$$3)\ I = \int_{(1,2)}^{(-3,-2)} \frac{y^2}{(x-y)^2}\,dx - \frac{x^2}{(x-y)^2}\,dy. \quad 4)\ I = \int_{\left(\frac{1}{3},-2\right)}^{(3,0)} \frac{y}{1+xy}\,dx + \frac{x}{1+xy}\,dy.$$

R: 1) $I = \ln\dfrac{13}{5}$. 2) $I = 2$. 3) $I = 4$. 4) $I = \ln 3$.

10.29 *Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferenţială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:*

$$1)\ I = \int_{(1,1,0)}^{(2,3,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz. \quad 2)\ I = \int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x\,dx - y^2dy + z\,dz.$$

$$3)\ I = \int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad 4)\ I = \int_{(1,-2,2)}^{(0,3,4)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

R: 1) Cum: $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = xz$, $R(x,y,z) = xy$, avem:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = x,\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = z,$$

deci expresia de sub semnul integrală este o diferenţială exactă şi integrala curbilinie nu depinde de drum. Fie $A_1(1,1,0)$, $A_2(2,1,0)$, $A_3(2,3,0)$, $A_4(2,3,1)$. Alegem pentru integrare curba simplă $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, în care $\mathcal{C}_1$ are ca imagine segmentul A_1A_2 paralel cu axa Ox, $\mathcal{C}_2$ are ca imagine segmentul A_2A_3 paralel cu axa Oy, $\mathcal{C}_3$ are ca imagine segmentul A_3A_4 paralel cu axa Oy, având reprezentările parametrice:

$$(\mathcal{C}_1) \begin{cases} x = t, \\ y = 1, \\ z = 0, \end{cases} t \in [1,2]\,,\ (\mathcal{C}_2) \begin{cases} x = 2, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} t \in [1,3]\,,\ (\mathcal{C}_3) \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = t, \end{cases} t \in [0,1]\,.$$

Obţinem: $I = \int_1^2 0\,dt + \int_1^3 0\,dt + \int_0^1 6\,dt = 6$. 2) $I = \dfrac{10}{3}$. 3) $I = 5\sqrt{2}$. 4) $I = \dfrac{2}{15}$.

10.30 *Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferenţială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:*

$$1)\ I = \int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{-yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{(x - yz)^2}. \quad 2)\ I = \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{y^2z^2dx + 2x^2z\,dy + 2x^2y\,dz}{(2x + yz)^2}.$$

$$3)\ I = \int_{(-1,3,1)}^{(2,6,3)} \frac{y}{z}\,dx + \frac{x}{z}\,dy - \frac{xy}{z^2}\,dz. \quad 4)\ I = \int_{(-1,1,5)}^{(2,2,4)} \frac{z\,(dx + dy) - (x + y)\,dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}.$$

R: 1)$I = -\dfrac{9}{2}$. 2) $I = \dfrac{2}{3}$. 3) $I = 7$. 4) $I = \dfrac{\pi}{2}$.

10.5 Calculul ariei cu ajutorul integralei curbilinii

10.31 *Să se calculeze, cu ajutorul integralei curbilinii, aria domeniului plan mărginit de:*

1) *Elipsa:* $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$.
2) *Astroida:* $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi)$.
3) *Cardioida:* $x = a\,(2\cos t - \cos 2t),\ y = a\,(2\sin t - \sin 2t),\ t \in [0, 2\pi]$.
4) *Foliul lui Descartes:* $x = \dfrac{3at}{1 + t^3},\ \ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3},\ t \in (0, \infty)$.

R: 1) Deoarece $x\,dy - y\,dx = ab\,dt$, avem $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$.

2) Deoarece $x\,dy - y\,dx = \dfrac{3a}{4}\sin^2 2t\,dt$, avem $\mathcal{A} = \dfrac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \dfrac{3\pi a^2}{8}$. 3) $\mathcal{A} = 6\pi a^2$. 4) $\mathcal{A} = \dfrac{3a^2}{2}$.

Capitolul 11

Integrale multiple

11.1 Integrala dublă

11.1 *Să se calculeze integralele duble:*

1) $I = \iint_D \ln(x+y)\, dxdy,$ *unde:* $D = \{(x,y)\,,\ 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\}$.
2) $I = \iint_D \dfrac{\cos y}{1+\sin x \sin y}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
3) $I = \iint_D \left(\cos^2 x + \sin^2 y\right) dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}\right\}$.
4) $I = \iint_D e^{x+\sin y} \cos y\, dxdy,$ *unde:* $D = [0,\pi] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5) $I = \iint_D \dfrac{x^2}{1+y^2}\, dxdy,$ *unde:* $D = [0,1] \times [0,1]$.

R: 1) Funcţia de sub semnul integrală este continuă. Domeniul D este un dreptunghi. Aplicăm formula de reducere la integrale iterate, în ordinea y, x. Avem:

$$I = \int_0^1 dx \int_1^2 \ln(x+y)\, dy = \int_0^1 \left[(x+2)\ln(x+2) - (x+1)\ln(x+1) - 1\right] dx,$$

deci $I = \dfrac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \dfrac{3}{2}$.

2) Domeniul D este un dreptunghi. Aplicăm formula de reducere la integrale iterate, în ordinea x, y. Avem mai întâi, efectuând schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{1+\sin x \sin y}\, dx = \int_0^1 \frac{2\cos y\, dt}{t^2 + 2t\sin y + 1} = 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sin y}{\cos y} - 2y = \frac{\pi}{2} - y.$$

Apoi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{1+\sin x \sin y}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy = \frac{1}{8}\pi^2.$$

3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x + \sin^2 y\right) dy = \dfrac{1}{16}\pi^2$. 4) $I = (e-1)\left(e^{\pi}-1\right)$. 5) $I = \dfrac{\pi}{12}$.

11.2 *Să se calculeze integralalele iterate:*

$$1)\ I=\int_0^1 dx\int_0^1\left(x^3+2xy\right)dy.\quad 2)\ I=\int_1^2 dx\int_0^1 \frac{1}{x+y}\,dy.$$
$$3)\ I=\int_{-1}^1 dx\int_0^1 \frac{y}{1+x^2y^2}\,dy.\quad 4)\ I=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy.$$

R: *1)* $I=\frac{3}{4}$. *2)* $I=3\ln 3-4\ln 2$. *3)* $I=\frac{1}{2}\pi-\ln 2$. *4)* $I=\frac{1}{12}\pi$.

11.3 *Să se calculeze integralele duble:*

$$1)\ I=\iint_D \frac{y\,dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ \textit{unde: } D=[0,1]\times[0,1].$$
$$2)\ I=\iint_D x^2y\cos\left(xy^2\right)dxdy,\ \textit{unde: } D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2].$$
$$3)\ I=\iint_D x^2ye^{xy}dxdy,\ \textit{unde: } D=[0,1]\times[0,2].$$
$$4)\ I=\iint_D \frac{dxdy}{\left(x+y+1\right)^2},\ \textit{unde: } D=[0,1]\times[0,1.$$

R: 1) $I=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. 2) $I=-\frac{\pi}{16}$. 3) $I=2$. 4) $I=\ln\frac{4}{3}$.

11.4 *Să se transforme integrala dublă* $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ *în integrale simple iterate, pentru următoarele domenii:*

$$1)\ D=\left\{(x,y),\ x^2+y^2\le 2x\right\}.$$
$$2)\ D=\left\{(x,y),\ x^2+y^2\le 4,\ x^2+\frac{1}{4}y^2\ge 1,\ x\ge 0\right\}.$$

R: 1) D este un domeniu simplu în raport cu axa Oy:

$$D=\{(x,y),\ -\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{2x-x^2},\ x\in[0,2]\},$$

deci $I=\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

2) D este un domeniu simplu în raport cu axa Ox:

$$D=\{(x,y),\ \sqrt{1-\frac{1}{4}y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2},\ y\in[-2,2]\},$$

deci $I=\int_{-2}^2 dy\int_{\sqrt{1-\frac{1}{4}y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$.

11.5 *Să se calculeze următoarele integrale iterate:*

$$1)\ I=\int_{-1}^1 dx\int_{-x}^x xdy.\ 2)\ I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{xy}\,dy.\ 3)\ I=\int_{-R}^R dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} 3x^2y^2dx.$$

R: 1) $I = \dfrac{4}{3}$. 2) $I = \dfrac{4}{27}$. 3) $I = 2R^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t \, dt = \dfrac{\pi}{8} R^6$.

11.6 *Să se calculeze integrala dublă:* $I = \iint_D (x-y)\, dxdy$, *unde* D *este domeniul plan mărginit de curbele de ecuaţii:* $y = 2 - x^2$ *şi* $y = 2x - 1$.

R: $I = \dfrac{64}{15}$.

11.7 *Să se calculeze integralele duble pe domeniul* D *mărginit de curbele indicate:*

1) $I = \iint_D (x + 2y)\, dxdy, \quad y = x,\ y = 2x,\ x = 2,\ x = 3.$
2) $I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy, \quad y = x,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2.$
3) $I = \iint_D \left(3x^2 - 2xy + y\right) dxdy, \quad x = 0,\ x = y^2,\ y = 2.$
4) $I = \iint_D y \ln x \, dxdy, \quad xy = 1,\ y = \sqrt{x},\ x = 2.$
5) $I = \iint_D (\cos 2x + \sin y)\, dxdy, \quad x = 0,\ y = 0,\ 4x + 4y = \pi.$

R: 1) $I = \dfrac{76}{3}$. 2) $I = 5$. 3) $I = \dfrac{244}{21}$. 4) $I = \dfrac{5}{8}(\ln 4 - 1)$. 5) $I = \dfrac{1}{4}\left(\pi + 1 - 2\sqrt{2}\right)$.

11.8 *Să se calculeze integralele duble pe domeniul* D*, unde* D *este interiorul triunghiului cu vârfurile în punctele indicate:*

1) $I = \iint_D x \, dxdy, \quad A(2,3),\ B(7,2),\ C(4,5).$
2) $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\, dxdy, \quad O(0,0),\ A(1,0),\ B(1,1).$

R: 1) $I = 26$. 2) $I = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

11.9 *Să se calculeze integralele duble:*

1) $I = \iint_D (1 - y)\, dxdy$, *unde:* $D = \left\{(x,y),\ x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ y \le x^2,\ x \ge 0\right\}$.
2) $I = \iint_D (|x| + |y|)\, dxdy$, *unde:* $D = \{(x,y),\ |x| + |y| \le 1\}$.
3) $I = \iint_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x}}$, *unde:* $D = \left\{(x,y),\ y^2 \le 8x,\ y \le 2x,\ y + 4x \le 24\right\}$.

R: 1) $I = \dfrac{1}{15}$. 2) $I = \dfrac{4}{3}$. 3) $I = 15\sqrt{2}$.

11.10 *Să se calculeze integralele duble pe domeniul* D *mărginit de curbele indicate:*

1) $I = \iint_D (x + y)\, dxdy, \quad y = x^2,\ y = x.$
2) $I = \iint_D \dfrac{x^2 dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x = 0,\ y = 1,\ y = \sqrt[3]{2},\ y = x.$
3) $I = \iint_D \arcsin \sqrt{x + y}\, dxdy, \quad x + y = 0,\ x + y = 1,\ y = -1,\ y = 1.$
4) $I = \iint_D \dfrac{x^3}{y}\, dxdy, \quad y = 4,\ y = x^2,\ y = \dfrac{1}{4}x^2.$

R: 1) $I=\dfrac{3}{20}$. 2) $I=\dfrac{1}{6}\left[\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. 3) $I=\dfrac{\pi}{4}$. 4) $I=30$.

11.11 *Să se calculeze*

$$I=\iint_D \frac{dxdy}{1+y\cos x},\ \text{unde: } D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\alpha]$$

şi apoi să se deducă valoarea integralei:

$$J(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,dx,\quad \alpha\in(0,1).$$

R: Integrând în ordinea y, x, avem:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^\alpha \frac{dy}{1+y\cos x}=\int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,dx=J(\alpha).$$

Schimbând ordinea de integrare şi punând $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, $y=\cos 2\theta$, obţinem:

$$I=\int_0^\alpha dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+y\cos x}=-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2}\arccos\alpha}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^1\frac{2}{\sin 2\theta}\frac{d\left(t\operatorname{tg}\theta\right)}{1+t^2\operatorname{tg}^2\theta},$$

de unde, $I=J(\alpha)=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{1}{2}\left(\arccos\alpha\right)^2$.

11.12 *Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de parabolele: $y^2=10x+26$ şi $y^2=10-6x$.*

R: Parabolele se intersectează în punctele: $(-1,-4)$ şi $(-1,4)$. Considerând domeniul simplu în raport cu aza Ox, putem scrie:

$$D=\left\{(x,y),\ \frac{y^2-26}{10}\le x\le\frac{10-y^2}{6},\ y\in[-4,4]\right\},$$

deci $\mathcal{A}=\iint_D dxdy=\int_{-4}^4 dy\int_{\frac{y^2-26}{10}}^{\frac{10-y^2}{6}}dx=\dfrac{1024}{45}$.

11.13 *Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.*

R: Considerând domeniul simplu în raport cu axa Oy, avem

$$D=\left\{(x,y),\ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[-a,a]\right\},$$

deci

$$\mathcal{A}=\iint_D dxdy=\int_{-a}^a dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy=2\frac{b}{a}\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\pi ab.$$

11.14 *Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele de ecuaţii* $x = y^2 - 2y$, $x + y = 0$.

R: $\mathcal{A} = \dfrac{1}{6}$.

11.15 *Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele de coordonate, planul* $x+y = 1$ *şi paraboloidul eliptic* $z = 2x^2 + y^2 + 1$.

R: $D = \{(x,y)\,,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ x \in [0,1]\}$ şi deci:

$$\mathcal{V} = \iint\limits_D (2x^2 + y^2 + 1)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1)\,dy = \frac{3}{4}.$$

11.16 *Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele* $x = 1$, $z = 0$ *şi paraboloidul hiperbolic* $z = x^2 - y^2$.

R: $D = \{(x,y)\,,\ -x \leq y \leq x,\ x \in [0,1]\}$ şi deci

$$\mathcal{V} = \iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)dy = \frac{1}{3}.$$

11.17 *Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele* $y = x$, $y = 0$, $z = 0$ *şi cilindrul* $x^2 + z^2 = a^2$, *situat în primul octant.*

R: $\mathcal{V} = \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}dy = \dfrac{1}{3}a^3$.

11.18 *Să se calculeze volumul corpului mărginit de elipsoidul* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

R: $\mathcal{V} = 8\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}dy = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

11.19 *Să se calculeze, trecând la coordonate polare, următoarele integrale duble:*

1) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.
2) $I = \iint_D \sin\left(x^2 + y^2\right)dxdy$, *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \leq 0\right\}$.
3) $I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ x^2 + y^2 \leq ax\right\}$.
4) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax\right\}$.

R: 1) Trecând la coordonate polare $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, cum $J(r,\theta) = r$, avem:

$$I = \iint\limits_D r^2 drd\theta, \text{ unde: } D' = \{(r,\theta)\,,\ 0 \leq r \leq 2,\ \theta \in [0, 2\pi]\}$$

şi deci: $I = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \dfrac{16}{3}\pi$. 2) $I = \int_0^a dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r \sin r^2 d\theta = \dfrac{1}{2}\pi\left(1 - \cos a^2\right)$.

3) Trecând la coordonate polare avem:

$$I = \iint\limits_{D} r\sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta, \text{ unde: } D' = \left\{ (r, \theta), \ 0 \le r \le a\cos\theta, \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

şi deci:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^3\theta\right) d\theta = \frac{1}{9}a^3 \left(3\pi - 4\right).$$

4) Trecând la coordonate polare avem:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta} r^2 dr = \frac{7}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{14}{9}a^3.$$

11.20 *Să se calculeze integrala I pe domeniul D mărginit de curbele de ecuaţii indicate:*

1) $I = \iint_D \dfrac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy, \ \ x^2 + y^2 = \dfrac{\pi^2}{9}, \ x^2 + y^2 = \pi^2.$

2) $I = \iint_D dxdy, \ \ xy = 1, \ xy = 2, \ y = x, \ y = 3x.$

R: 1) Trecând la coordonate polare avem: $D' = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \times [0, 2\pi]$ şi deci:

$$I = \iint\limits_{D} \sin r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin r\, dr = 3\pi.$$

2) Efectuăm schimbarea de variabile: $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \ y = \sqrt{uv}$, avem: $J(u, v) = \dfrac{1}{2v}$. Rezultă $I = \ln\sqrt{3}$.

11.21 *Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele de ecuaţii: $xy = a$, $xy = b$ $(0 < a < b)$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$ şi situat în primul cadran.*

R: Efectuăm schimbarea de variabile: $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$, $D' = [a, b] \times [\alpha, \beta]$. Deoarece $J(u, v) = \dfrac{1}{2v}$, avem:

$$\mathcal{A} = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D} \frac{1}{v}\, dudv = \frac{b - a}{2} \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

11.22 *Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele de ecuaţii: $xy = a$, $xy = b$ $(0 < a < b)$, $x^2 = \alpha y$, $x^2 = \beta y$ $(0 < \alpha < \beta)$.*

R: $\mathcal{A} = \dfrac{b - a}{3} \ln\dfrac{\beta}{\alpha}$.

11.23 *Să se calculeze integralele duble următoare, efectuând schimbări de variabile corespunzătoare:*

1) $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$
2) $I = \iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ y \geq 0\right\}.$
3) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\right\}.$
4) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ ax \leq x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$
5) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax,\ y \geq 0\right\}.$

R: 1) $I = \frac{2}{3}\pi ab$. 2) $I = \frac{1}{5}\pi a^5$. 3) $I = \frac{14}{3}\pi^4$. 4) $I = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$. 5) $I = \frac{14}{9}a^3$.

11.24 *Să se calculeze integralele duble următoare, efectuând schimbări de variabile corespunzătoare:*

1) $I = \iint_D \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\right\}.$
2) $I = \iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$
3) $I = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$
4) $I = \iint_D \ln\left(x^2 + y^2\right) dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4\right\}.$

R: 1) $I = 2\pi$. 2) $I = \pi\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$. 3) $I = 2\pi\sqrt{3}$. 4) $I = \pi e^2\left(3e^2 - 1\right)$.

11.25 *Să se calculeze următoarele integrale duble:*

1) $I = \iint_D \arcsin\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\pi}\, dxdy,$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\right\}.$
2) $I = \iint_D \frac{\left(x^2 + y^2\right) dxdy}{\sqrt{4 - \left(x^2 + y^2\right)^2}},$ *unde:* $D = \left\{(x,y)\,,\ \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$

R: 1) $I = \pi^3\left(\frac{7}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. 2) Trecând la coordonate polare, avem:

$$D' = \left\{(r,\theta)\,,\ 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{1 + \sin^2\theta}},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

şi deci $I = \iint_D \frac{r^3}{\sqrt{4 - r^4}}\, drd\theta = 4\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \sqrt{2}\ln 3$.

11.26 *Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafeţele de ecuaţii* $z^2 = xy,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ z = 0.$

R: Dacă $D = \left\{(x,y)\,,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\right\}$, atunci $\mathcal{V} = \iint_D \sqrt{xy}\, dxdy$. Efectuând schimbarea de variabile: $x = u^2,\ y = v^2,\ (u,v) \in \Delta$, cu

$$\Delta = \{(u,v)\,,\ 0 \leq u \leq 1 - v,\ 0 \leq v \leq 1\},$$

cum $J(u,v) = 4uv$, găsim: $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\int_0^1 v^2 (1-v)^3\, dv = \frac{1}{45}$.

11.27 *Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate ale plăcii plane omogene* ($\rho(x,y) = \text{const.}$), *care ocupă un domeniul:*

$$1)\ D = \left\{(x,y)\,,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$
$$2)\ D = \left\{(x,y)\,,\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x^2 + y^2 \geq ax,\ y \geq 0\right\},\ a > 0.$$

R: 1) $\mathcal{M} = \frac{1}{3}a^2 b\rho$, $G\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$. 2) $\mathcal{M} = \frac{3}{8}\pi a^2$, $G\left(-\frac{a}{6}, \frac{14a}{9\pi}\right)$.

11.28 *Să se determine coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane omogene mărginite de următoarele curbe:*

$$1)\ y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4.$$
$$2)\ 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0,\ 3x + 5y = 15,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

R: 1) $G\left(\frac{2}{5}, 0\right)$. 2) $G\left(\frac{10}{3(\pi - 2)}, \frac{2}{\pi - 2}\right)$.

11.29 *Să se determine coordonatele centrului de greutate ale plăcii plane de densitate superficială* $\rho(x,y) = y$, *mărginită de curbele:* $y = x^2$ *şi* $y = 1$.

R: $G\left(0, \frac{5}{7}\right)$.

11.30 *Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea ale plăcii plane de densitate superficială* $\rho(x,y) = xy$, *care ocupă domeniul*

$$D = \{(x,y)\,,\ x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

R: $I_x = I_y = \frac{1}{120}$, $I_0 = \frac{1}{60}$.

11.31 *Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea ale plăcilor plane omogene, care ocupă domeniile plane mărginite de următoarele curbe:*

$$1)\ y = x^2,\ x = y^2.$$
$$2)\ x^2 + y^2 = ay,\ a > 0.$$
$$3)\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0,\ a > 0.$$

R: 1) $I_x = I_y = \frac{3}{35}$, $I_0 = \frac{6}{35}$. 2) $I_x = \frac{5}{64}\pi a^4$, $I_y = \frac{1}{64}\pi a^4$, $I_0 = \frac{3}{32}\pi a^4$. 3) $I_x = I_y = \frac{1}{84}a^4$, $I_0 = \frac{1}{42}a^4$.

11.32 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa* Oy *a plăcii plane de densitate superficială* $\rho(x,y) = \frac{1}{x^4}$, *care ocupă domeniul mărginit de curbele de ecuaţii:*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = b,\ x = \alpha^2 y,\ x = \beta^2 y,\ 0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta.$$

R: Efectuăm schimbarea de variabile: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=u$, $\dfrac{x}{y}=v$, $D'=[a,b]\times\left[\alpha^2,\beta^2\right]$. Se obţine $I_y=2\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\ln\dfrac{b}{a}$.

11.33 *Utilizând formula lui Green, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, pe curbele închise $\mathcal{C}$, parcurse în sens direct:*

1) $I=\oint_{\mathcal{C}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy$, *unde $\mathcal{C}$ este conturul dreptunghiului $D=[1,4]\times[0,2]$.*

2) $I=\oint_{\mathcal{C}}e^{x^2+y^2}\left(-y\,dx+x\,dy\right)$, *unde $\mathcal{C}$ este cercul $x^2+y^2=1$.*

3) $I=\oint_{\mathcal{C}}(xy-y)\,dx+(xy+x)\,dy$, *unde $\mathcal{C}$ este frontiera domeniului plan* $D=\left\{(x,y)\,,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$, $a>0,\ b>0$.

4) $I=\oint_{\mathcal{C}}(x-y)\,dx+dy$, *unde $\mathcal{C}$ este frontiera domeniului plan* $D=\left\{(x,y)\,,\ x^2+y^2\le 2x,\ y\ge 0\right\}$.

5) $I=\oint_{\mathcal{C}}y^2dx+x^2dy$, *unde $\mathcal{C}$ este frontiera domeniului plan* $D=\left\{(x,y)\,,\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\right\}$.

6) $I=\oint_{\mathcal{C}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy$, *unde* $(\mathcal{C})\ x=1+\cos t,\ y=1+\sin t,\ t\in[0,2\pi]$.

7) $I=\oint_{\mathcal{C}}2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2\,dy$, *unde $\mathcal{C}$ este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $A\,(1,1)$, $B\,(2,2)$, $C\,(1,3)$.*

8) $I=\oint_{\mathcal{C}}-y^3dx+x^3dy$, *unde $\mathcal{C}$ este conturul cercului cu centrul în origine şi raza egală cu* 1.

9) $I=\oint_{\mathcal{C}}e^{-x^2+y^2}\left[\cos(2xy)\,dx+\sin(2xy)\,dy\right]$, *unde* $(\mathcal{C})\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

R: 1) Deoarece: $P\,(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ şi $Q\,(x,y)=y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$, obţinem: $I=\iint_D y^2dxdy=8$. 2) $I=2\pi e$. 3) $I=2\pi ab$. 4) $I=\dfrac{1}{2}\pi$. 5) $I=-\dfrac{4}{3}$. 6) $I=\dfrac{5}{4}\pi$. 7) $I=-\dfrac{4}{3}$. 8) $I=\dfrac{3}{2}\pi$. 9) $I=0$.

11.2 Aria suprafeţelor

11.34 *Să se determine aria porţiunii din sfera $(\mathcal{S})$ $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$, situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=ay$.*

R: Datorită simetriei, aria cerută este de patru ori aria porţiunii situată în primul octant, pentru care avem:

$$f\,(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ p=\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ q=\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

definită pe $D\left\{(x,y)\,,\ x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$. Deci $S=4a\iint_D\dfrac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$. Trecând la coordonate polare, avem: $D'=\left\{(r,\theta)\,,\ 0\le r\le a\sin\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$. Se obţine $S=2a^2\,(\pi-2)$.

11.35 *Să se determine aria porţiunii din conul* $(\mathcal{S})$ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$*, situată în interiorul cilindrului de ecuaţie:* $x^2 + y^2 = 2x$.

R: $S = \iint_{\mathcal{S}} dS = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = \sqrt{2} \iint_D dxdy = \pi\sqrt{2}$.

11.36 *Să se calculeze aria suprafeţei:*

$$(\mathcal{S}) \;\; x = \operatorname{tg} u \cos v, \;\; y = \operatorname{tg} u \sin v, \;\; z = \frac{\sin u}{2\cos^2 u} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin u}{\cos u} + v,$$

$(u, v) \in \Delta = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi]$.

R: $S = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv = \dfrac{8\pi}{3}$.

11.37 *Să se calculeze aria porţiunii din paraboloidul de rotaţie* $(\mathcal{S})$ $z = x^2 + y^2$*, situată în interiorul cilindrului:* $x^2 + y^2 = r^2$.

R: $S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy = \dfrac{\pi}{6} \left[\sqrt{(4r^2 + 1)^3} - 1\right]$.

11.38 *Să se găsească aria porţiunii din paraboloidul eliptic* $(\mathcal{S})$ $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$, $a > 0$, $b > 0$*, situată în interiorul cilindrului eliptic:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c^2$.

R: $S = \dfrac{2}{3}\pi ab \left[\left(1 + c^2\right)\sqrt{1 + c^2} - 1\right]$.

11.39 *Să se calculeze aria porţiunii din cilindrul parabolic* $(\mathcal{S})$ $x^2 = 2z$*, mărginită de planele de ecuaţii:* $x = 2y$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

R: $S = 13$.

11.40 *Să se găsească aria porţiunii din paraboloidul hiperbolic* $(\mathcal{S})$ $x = 1 - y^2 - z^2$*, situată în interiorul cilindrului de ecuaţie:* $y^2 + z^2 = 1$.

R: Proiectăm suprafaţa în planul Oyz:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}\, dydz = \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

11.41 *Să se calculeze aria porţiunii din cilindrul parabolic* $(\mathcal{S})$ $z = x^2$*, mărginită de planele de ecuaţii:* $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

R: $S = \dfrac{5}{6} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

11.42 *Să se calculeze aria porţiunii din cilindrul* $(\mathcal{S})$ $x^2 + z^2 = a^2$*, situată în interiorul cilindrului de ecuaţie:* $x^2 + y^2 = a^2$.

R: Datorită simetriei, aria căutată este de opt ori aria porţiunii din primul octant, de ecuaţie: $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, definită pe domeniul $D = \{(x, y)\,,\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$,

$$S = 8a \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = 16a^2.$$

11.3 Integrala de suprafaţă de primul tip

11.43 *Să se calculeze integralele de suprafaţă de primul tip:*

1) $I = \iint_{\mathcal{S}} (x + y + z)\, dS$, *unde* $\mathcal{S}$ *este suprafaţa cubului ale cărui feţe aparţin planelor de coordonate şi planelor* $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

2) $I = \iint_{\mathcal{S}} \left(x^2 + y^2\right) dS$, *unde* $\mathcal{S}$ *este sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3) $I = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$, *unde* $\mathcal{S}$ *este suprafaţa laterală a conului* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$.

R: 1) Scriem integrala ca suma integralelor pe cele şase feţe ale cubului. $I = 9$.

2) O reprezentare parametrică a sferei este: $x = a\cos u \cos v$, $y = a \sin u \cos v$, $z = a \sin v$, cu $(u, v) \in \Delta = [0, 2\pi] \times \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, iar $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = a^2 \cos v$. Deci:

$$I = a^4 \iint\limits_\Delta \cos^3 u\, dudv = \frac{8}{3}\pi a^4.$$

3) O reprezentare parametrică a conului este: $x = av\cos u$, $y = av \sin u$, $z = bv$, cu $(u, v) \in \Delta = [0, 2\pi] \times [0, 1]$, iar $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = av\sqrt{a^2 + b^2}$. Deci:

$$I = a^2\sqrt{a^2 + b^2} \iint\limits_\Delta v^2 dudv = \frac{2}{3}\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

11.44 *Să se calculeze integralele de suprafaţă de primul tip:*

1) $I = \iint_{\mathcal{S}} \left(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2\right) dS$, *unde* $\mathcal{S}$ *este porţiunea din conul* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, *situată în interiorul cilindrului* $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

2) $I = \iint_{\mathcal{S}} \dfrac{z\, dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$, *unde* $\mathcal{S}$ *este porţiunea din paraboloidul* $2az = x^2 + y^2$, *situată între planele* $z = 0$ *şi* $z = h$ $(a > 0,\ h > 0)$.

3) $I = \iint_{\mathcal{S}} \dfrac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}$, *unde:* $\mathcal{S} = \left\{(x, y, z)\,,\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0\right\}$.

4) $I = \iint_{\mathcal{S}} z\, dS$, *unde:* $\mathcal{S} = \{(x, y, z)\,,\ x = u\cos v,\ y = u \sin v,\ z = v,\ (u, v) \in \Delta\}$, *cu* $\Delta = [0, a] \times [0, 2\pi]$.

5) $I = \iint_{\mathcal{S}} \left(x^2 + y^2\right) dS$, *unde* $\mathcal{S}$ *este suprafaţa conică* $z^2 = x^2 + y^2$, *cuprinsă între planele* $z = 0$ *şi* $z = 1$.

R: 1) $I = \dfrac{29}{8}\pi\sqrt{2}$. 2) $I = \pi h^2$. 3) $I = \dfrac{2}{3}\pi a\sqrt{3}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

4) $I = \pi^2\left[a\sqrt{a^2 + 1} + \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)\right]$. 5) $I = \dfrac{1}{2}\pi\sqrt{2}$.

11.45 *Să se determine masa suprafeţei omogene* $(\rho = \rho_0)$*:* $(\mathcal{S})\ z = \frac{1}{h}\left(x^2 + y^2\right),\ 0 \leq z \leq h,\ h > 0.$

R: $\mathcal{M} = \rho_0 \iint_{\mathcal{S}} dS = \rho_0 \iint_D \sqrt{1 + \frac{4}{h^2}\left(x^2 + y^2\right)}\, dxdy = \frac{1}{6}\rho_0 \pi h^2 \left(5\sqrt{5} - 1\right)$, unde $D = \left\{(x, y),\ x^2 + y^2 \leq h^2\right\}$.

11.46 *Să se determine masa suprafeţei* $(\mathcal{S})\ z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right),\ 0 \leq z \leq 1$*, având densitatea superficială* $\rho(x, y, z) = z$.

R: $\mathcal{M} = \iint_{\mathcal{S}} z dS = \frac{1}{2}\iint_D \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \frac{2}{15}\pi\left(6\sqrt{3} + 1\right)$, unde $D = \left\{(x, y),\ x^2 + y^2 \leq 2\right\}$.

11.47 *Să se determine masa suprafeţei cubului* $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$*, având densitatea superficială* $\rho(x, y, z) = xyz$.

R: $\mathcal{M} = \frac{3}{4}$.

11.48 *Să se găsească coordonatele centrului de greutate al suprafeţei omogene* $z = x^2 + y^2$*, situată în interiorul cilindrului* $x^2 + y^2 - x = 0$.

R: $G\left(0, 0, \frac{16}{19}\right)$.

11.49 *Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate ale suprafeţei omogene* $(\rho = 1)$*:* $(\mathcal{S})\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1.$

R: $\mathcal{M} = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2} - 1\right)$ şi $G\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2} + 1\right)\right)$.

11.50 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa* Oz *al suprafeţei omogene* $(\rho = \rho_0)$*:* $(\mathcal{S})\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0.$

R: $I_z = \frac{4}{3}\pi a^4 \rho_0$.

11.51 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa* Oz *al suprafeţei omogene* $(\rho = \rho_0)$*:* $(\mathcal{S})\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leq z \leq h,\ h > 0.$

R: $I_z = \frac{1}{2}\pi h^4 \sqrt{2}$.

11.4 Integrala de suprafaţă de tipul al doilea

11.52 *Să se calculeze integralele de suprafaţă de tipul al doilea:*

1) $I = \iint_{\mathcal{S}} yz\,dydz + zx\,dzdx + xy\,dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa exterioară a tetraedrului mărginit de planele de coordonate şi de planul* $x + y + z = a$ $(a > 0)$.

2) $I = \iint_{\mathcal{S}} z\,dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa exterioară a elipsoidului* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

3) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa exterioară a emisferei* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

R: 1) Scriem integrala ca suma integralelor pe cele patru feţe ale tetraedrului:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_z)\ z &= 0,\ D_z = \{(x,y)\,,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq a\}\,, \\
(\mathcal{S}_x)\ x &= 0,\ D_x = \{(y,z)\,,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y + z \leq a\}\,, \\
(\mathcal{S}_y)\ y &= 0,\ D_y = \{(z,x)\,,\ z \geq 0,\ x \geq 0,\ z + x \leq a\}\,,
\end{aligned}$$

în care perechile $\mathcal{S}_z$ şi D_z, $\mathcal{S}_x$ şi D_x, $\mathcal{S}_y$ şi D_y au orientări diferite, iar $\mathcal{S}_0$, faţa conţinută în planul $x + y + z = a$, a cărei proiecţii pe planele de coordonate constă în D_z, D_x, D_y, având aceeaşi orientare cu $\mathcal{S}_0$. Astfel

$$\iint_{\mathcal{S}} xy\,dxdy = \iint_{\mathcal{S}_z} xy\,dxdy + \iint_{\mathcal{S}_0} xy\,dxdy = -\iint_{D} xy\,dxdy + \iint_{D} xy\,dxdy = 0.$$

Rezultate identice avem pentru ceilalţi doi termeni. Deci $I = 0$.

2) Integrala sa reduce la

$$I = \iint_{D} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,$$

unde $D_z = \left\{(x,y)\,,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$. Se obţine $I = \dfrac{4}{3}\pi abc$. 3) $I = \dfrac{1}{2}\pi a^4$.

11.53 *Să se calculeze integralele de suprafaţă de tipul al doilea:*

1) $I = \iint_{\mathcal{S}} y\,dydz + z\,dzdx + 3x\,dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa interioară a sferei* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, *situată în primul octant.*

2) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^2y^2z\,dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa exterioară a emisferei* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

3) $I = \iint_{\mathcal{S}} xz\,dydz + yz\,dzdx + \left(x^2 + y^2\right)dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa superioară a suprafeţei* $(\mathcal{S})$ $z = x^2 + y^2$, *care se proiectează ortogonal pe planul* Oxy *în domeniul*

$D = \left\{(x,y)\,,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

4) $I = \iint_{\mathcal{S}} \dfrac{dxdy}{\sqrt{4x^2 + y^2 + 1}}$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa exterioară a paraboloidului* $(\mathcal{S})$ $z = 4x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

5) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa exterioară a tetraedrului cu vârfurile în punctele* $O\,(0,0,0)$, $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,1,0)$, $C\,(0,0,1)$.

6) $I = \iint_{\mathcal{S}} \left(x^2 + y^2\right) z\,dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa exterioară a paraboloidului* $(\mathcal{S})$ $z = x^2 + y^2$, *situată în interiorul cilindrului* $x^2 + y^2 = 1$.

7) $I=\iint_{\mathcal{S}}\dfrac{dydz}{x}+\dfrac{dzdx}{y}+\dfrac{dxdy}{z}$, *unde* $\mathcal{S}$ *este faţa exterioară a elipsoidului* $(\mathcal{S})$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

R: 1) Deoarece $\cos\alpha=-\dfrac{x}{a}$, $\cos\beta=-\dfrac{y}{a}$, $\cos\gamma=-\dfrac{z}{a}$, avem

$$I=-\frac{1}{a}\iint\limits_{\mathcal{S}}(xy+yz+3zx)\,dS,$$

cu $(\mathcal{S})$ $x=a\cos u\sin v,\ y=a\sin u\sin v,\ z=a\cos v,\ (u,v)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Deoarece $dS=a^2\sin v\,dudv$, se obţine $I=-2a^3$. 2) $I=\dfrac{2}{105}\pi R^7$. 3) Versorul normalei la suprafaţă în punctul $M(x,y,z)$ este $\mathbf{n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(-2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+\mathbf{k})$, a.î.

$$I=\iint\limits_{\mathcal{S}}\frac{\left(x^2+y^2\right)(1-2z)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dS=-\frac{\pi}{6}.$$

4) Deoarece $\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{1+64x^2+4y^2}}$, urmează că $I=-\iint_D\dfrac{dxdy}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}=\pi\left(1-\sqrt{2}\right)$, unde $D=\left\{(x,y)\,,\ 4x^2+y^21\right\}$. 5) $I=\dfrac{1}{12}$. 6) $I=\dfrac{25}{84}\pi$. 7) O reprezentare parametrică a elipsoidului este $(\mathcal{S})$ $x=a\cos u\sin v$, $y=b\sin u\sin v$, $z=c\cos v$, $(u,v)\in\Delta$, cu $\Delta=[0,2\pi]\times[0,\pi]$. Rezultă

$$I=\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\iint\limits_{\Delta}\sin v\,dudv=\frac{4\pi}{abc}\left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right).$$

11.54 *Utilizând formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, pe curbele închise* $\mathcal{C}$*, parcurse în sens direct:*

1) $I=\oint_{\mathcal{C}}(x+3y+2z)\,dx+(2x+z)\,dy+(x-y)\,dz$, *unde* $\mathcal{C}$ *este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele* $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$.

2) $I=\oint_{\mathcal{C}}x^2y^3dx+dy+z\,dz$, *unde* $(\mathcal{C})$ $x^2+y^2=r^2$, $z=0$.

3) $I=\oint_{\mathcal{C}}(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, *unde* $(\mathcal{C})$ $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

4) $I=\oint_{\mathcal{C}}\left(y^2+z^2\right)dx+\left(z^2+x^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$, *unde* $(\mathcal{C})$ $x^2+y^2+z^2=4x^2$, $x^2+y^2=2x$, $z\geq 0$.

5) $I=\oint_{\mathcal{C}}(z-y)\,dx+(x-z)\,dy+(y-x)\,dz$, *unde* $\mathcal{C}$ *este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele* $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.

6) $I=\oint_{\mathcal{C}}y^2dx+z^2dy+x^2dz$, *unde* $(\mathcal{C})$ $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ *(curba lui Viviani).*

7) $I=\oint_{\mathcal{C}}(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, *unde* $(\mathcal{C})$ $x^2+y^2=1$, $x+z=1$.

8) $I=\oint_{\mathcal{C}}x\,dx+(x+y)\,dy+(x+y+z)\,dz$, *unde* $(\mathcal{C})$ $x=a\sin t$, $y=a\cos t$, $z=a(\sin t+\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$.

9) $I=\oint_{\mathcal{C}}\dfrac{dx}{1+x^2}+\dfrac{y\,dy}{\sqrt{x}}+x\,dz$, *unde* $(\mathcal{C})$ $x^2+y^2=2x$, $x+y+z=0$.

R: 1) Deoarece $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+3y+2z)\,\mathbf{i} + (2x+z)\,\mathbf{j} + (x-y)\,\mathbf{k}$ şi $\operatorname{rot}\mathbf{F} = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathcal{S}$ fiind suprafaţa triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$ din planul $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}-1=0$ şi deci $\mathbf{n} = \frac{1}{7}(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k})$, rezultă $I = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F})\,dS = -5$. 2) $I = -\frac{1}{8}\pi r^6$. 3) $I = 0$. 4) Deoarece $\cos\alpha = \frac{x-2}{2}$, $\cos\beta = \frac{y}{2}$, $\cos\gamma = \frac{z}{2}$, rezultă $I = \iint_D (z-y)\,dS = 4\pi$. 5) $I = ab+bc+ca$. 6) Avem

$$I = -2\iint\limits_D \left[x+y+\frac{xy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right] dxdy = -\frac{\pi}{4}a^3,$$

cu $D = \left\{(x,y)\,,\ x^2+y^2 \le ax\right\}$. 7) $I = 4\pi$. 8) $I = -\pi a^2$. 9) $I = -\pi$.

11.5 Integrala triplă

11.55 *Să se calculeze integralele triple:*

1) $I = \iiint_V x^3y^2z\,dxdydz$, *unde* $V = \{(x,y,z)\,,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy\}$.

2) $I = \iiint_V x^2dxdydz$, *unde* $V = \left\{(x,y,z)\,,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$.

3) $I = \iiint_V z\,dxdydz$, *unde* $V = \left\{(x,y,z)\,,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ z\ge 0\right\}$.

R: 1) $I = \int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz = \frac{1}{110}$. 2) Domeniul spaţial V este simplu în raport cu axa Oz, deci

$$V = \left\{(x,y,z)\,,\ -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \le z \le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ (x,y)\in D,\right\}$$

unde $D = \left\{(x,y)\,,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$. Deci

$$I = \iint\limits_D dxdy\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} x^2dz = 2c\iint\limits_D x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy.$$

Domeniul plan D este simplu în raport cu axa Oy, deci

$$D = \left\{(x,y)\,,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\ x\in[-a,a]\right\},$$

încât

$$I = 2c\int_{-a}^{a} dx\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dy = \pi bc\int_{-a}^{a} x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

3) $I=\dfrac{1}{4}\pi abc^2$.

11.56 *Să se calculeze integralele triple:*

1) $I=\iiint_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, *unde* V *este tetraedrul delimitat de planele de coordonate şi planul* $x+y+x=1$.

2) $I=\iiint_V \dfrac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^4}\,dxdydz$, *unde* $V=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

3) $I=\iiint_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{(1+x^2+y^2-z)^3}}$, *unde*

$V\left\{(x,y,z),\ x^2+y^2\geq z,\ x^2+y^2\leq 1,\ z\geq 0\right\}$.

4) $I=\iiint_V z\,dxdydz$, *unde*

$V=\left\{(x,y,z),\ 0\leq x\leq \dfrac{1}{2},\ x\leq y\leq 2x,\ 0\leq z\leq \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$.

5) $I=\iiint_V x^2dxdydz$, *unde* $V=\left\{(x,y,z),\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\right\}$.

6) $I=\iiint_V \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2+a^2}\,dxdydz$, *unde:* $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$.

7) $I=\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, *unde* V *este domeniul mărginit de cilindrul* $x^2+y^2=2x$ *şi planele* $y=0,\ z=0,\ z=a\ (a<0)$.

R: 1) Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz:

$$I=\iint_D dxdy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dxdy,$$

unde $D=\{(x,y),\ 0\leq y\leq 1-x,\ x\in[0,1]\}$, deci

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3-x}{4}\right)dx=\ln\sqrt{2}-\frac{5}{16}.$$

2) $I=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \dfrac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^4}\,dz=\dfrac{1}{192}$. 3) Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz:

$$I=\iint_D dxdy\int_0^{x^2+y^2}\frac{dz}{(1+x^2+y^2-z)^{\frac{3}{2}}}=-2\iint_D\left[1-\left(1+x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]dxdy,$$

unde $D=\left\{(x,y),\ x^2+y^2\leq 1\right\}$. Trecând la coordonate polare, avem $I=2\pi\left(2\sqrt{2}-3\right)$.

4) $I=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{2x}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\,dz=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{10}{3}x^3\right)dx=\dfrac{7}{192}$. 5) Trecem la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \quad (r,\varphi,\theta)\in[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\,.\\ z=r\cos\theta,\end{cases}$$

Deoarece $J(r,\varphi,\theta) = r^2 \sin\theta$, avem

$$I = \left(\int_0^R r^4 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta\right) = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

6) Trecem la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \quad (r,\theta,\varphi) \in [0,R] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Deoarece $dxdydz = r^2 \sin\theta\, drd\varphi d\theta$, avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{r^3 \sin^2\theta\cos\varphi}{r^2 + a^2}\, dr = \frac{\pi}{8}\left(R^2 + a^2 \ln\frac{a^2}{a^2 + R^2}\right).$$

7) Trecem la coordonate cilindrice: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $(r,\theta,z) \in V'$, unde $V' = \left\{(r,\theta,z)\,,\ 0 \le r \le 2\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le a\right\}$. Deoarece $J(r,\theta,z) = r$, avem

$$I = \iiint\limits_{V'} zr^2 drd\theta dz = \iint\limits_{D} drd\theta \int_0^a zr^2 dz = \frac{a^2}{2} \iint\limits_{D} r^2 drd\theta,$$

unde $D' = \left\{(r,\theta)\,,\ 0 \le r \le 2\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$, deci

$$I = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{8a^2}{9}.$$

11.57 *Să se calculeze următoarele integrale triple:*

1) $I = \iiint_V xyz\, dxdydz$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de sfera* $x^2+y^2+z^2 = 1$, *situat în primul octant.*

2) $I = \iiint_V xy^2z^3 dxdydz$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de suprafeţele* $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

3) $I = \iiint_V (2x + 3y - z)\, dxdydz$, *unde* V *este prisma triunghiulară mărginită de planele* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = a$, $x + y = b$, *cu* $a, b > 0$.

4) $I = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 dxdydz$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de cilindrul* $x^2 + y^2 = 1$ *şi planele* $y = 0$, $y = 1$.

5) $I = \iiint_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdydz$, *unde* $V = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$.

6) $I = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de suprafeţele* $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

7) $I = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) z\, dxdydz$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de paraboloidul* $z = x^2 + y^2$ *şi sfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

8) $I = \iiint_V z\, dxdydz$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de conul*
$z = \dfrac{a}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ *şi planul* $z = a$, *cu* $a, R > 0$.

R: 1) $I = \frac{1}{48}$. 2) $I = \frac{1}{364}$. 3) $I = \frac{1}{12}ab^2\left(10b - 3a\right)$. 4) $I = \frac{3}{2}\pi$. 5) $I = \frac{8}{9}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)$. 6) $I = \frac{16}{3}\pi$. 7) $I = \frac{8}{3}\pi$. 8) $I = \frac{1}{4}\pi a^2 R^2$.

11.58 *Să se calculeze următoarele integrale triple:*

1) $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de sferele* $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$.

2) $I = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, *unde* $V = \left\{(x,y,z)\,,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$.

3) $I = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$, *unde*
$V = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ z > 0\right\}$.

4) $I = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$, *unde*
$V = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2az,\ x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2\right\}$, *cu* $a > 0$.

5) $I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, *unde* $V = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq x\right\}$.

6) $I = \iiint_V x^2 dxdydz$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de suprafeţele* $z = ay^2$, $z = by^2$ *cu* $y > 0$ *şi* $0 < a < b$ *şi de suprafeţele* $z = \alpha x$, $z = \beta x$, $0 < \alpha < \beta$ *şi* $z = h$, $h > 0$.

7) $I = \iiint_V \frac{x\, dxdydz}{\left(x^2+y+z+1\right)^3}$, *unde*
$V = \{(x,y,z)\,,\ x+y+z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

8) $I = \iiint_V \frac{z^3 dxdydz}{(y+z)(x+y+z)}$, *unde*
$V = \{(x,y,z)\,,\ x+y+z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.

9) $I = \iiint_V \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\, dxdydz$, *unde*
$V = \left\{(x,y,z)\,,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$.

10) $I = \iiint_V z\, dxdydz$, *unde* $V = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq 8,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\right\}$.

11) $I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, *unde* $V = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq z\right\}$.

12) $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, *unde*
$V = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2+y^2+z^2 \geq 4,\ x^2+y^2+z^2 \leq 16\right\}$.

13) $I = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$, *unde* V *este domeniul spaţial mărginit de sfera* $x^2+y^2+z^2=9$ *şi conul* $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

R: 1) Se trece la coordonate sferice. Avem $V' = [1,2] \times [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $I = 2\pi$. 2) Se trece la coordonate sferice generalizate:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\sin\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\theta, \end{cases} \quad (r,\varphi,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]\,.$$

Deoarece $J(r,\varphi,\theta) = abcr^2 \sin\theta$, rezultă $I = \dfrac{4}{5}\pi abc$. 3) $I = \dfrac{1}{5}\pi a^5\left(2-\sqrt{2}\right)$. 4) $I = \dfrac{1}{5}\pi a^5\left(18\sqrt{3}-\dfrac{97}{6}\right)$. 5) $I = \dfrac{1}{10}\pi$. 6) $I = \dfrac{2}{27}\left(\dfrac{1}{\alpha^3}-\dfrac{1}{\beta^3}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)h^4\sqrt{h}$. 7) $I = \dfrac{1}{4}\ln\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 8) $I = \dfrac{1}{64}$. 9) $I = \dfrac{1}{4}\pi^2 abc$. 10) $I = 8\pi$. 11) $I = \dfrac{1}{10}\pi$. 12) $I = 24\pi$. 13) $I = \dfrac{243}{5}\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$.

11.59 *Să se calculeze, cu ajutorul integralei triple, volumul domeniului spaţial*

$$V = \left\{(x,y,z),\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ z \leq 1-y^2,\ x+y \leq 1\right\}.$$

R: $\mathcal{V} = \iiint_V dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-y^2} dz = \dfrac{5}{12}$.

11.60 *Să se calculeze, cu ajutorul integralei triple, volumul domeniului spaţial mărginit de suprafeţele*

1) $y^2 = 4a^2 - 3ax, y^2 = ax, z = \pm h$.
2) $x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 = ax$.
3) $y = x^2,\ y = 1,\ x+y+z = 3,\ z = 0$.

R: 1) $\mathcal{V} = \dfrac{32}{9}a^2h$. 2) $\mathcal{V} = \dfrac{1}{9}(3\pi-4)a^3$. 3) $\mathcal{V} = \int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{3-x-y} dz = \dfrac{16}{5}$.

11.61 *Utilizând formula lui Gauss-Ostrogradski, să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă pe suprafeţele închise $\mathcal{S}$ ce mărginesc domeniile spaţiale V,* **n** *fiind versorul normalei la faţa exterioară:*

1) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^3y^2dydz + x^2y^3dzdx + 3z\,dxdy$, *unde $\mathcal{S}$ este frontiera domeniului spaţial V mărginit de paraboloizii $z = x^2+y^2$, $z = 6-x^2-y^2$, $0 \leq z \leq 6$.*

2) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, *unde $\mathcal{S}$ este frontiera domeniului spaţial $V = [0,a]\times[0,a]\times[0,a]$, $a > 0$.*

3) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, *unde $\mathcal{S}$ este sfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$.*

4) $I = \iint_{\mathcal{S}} 2x^2yz\,dydz + z^2dzdx + xyz^2dxdy$, *unde $\mathcal{S}$ este frontiera domeniului spaţial $V = \left\{(x,y,z),\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leq 1,\ z \geq 0\right\}$.*

5) $I = \iint_{\mathcal{S}} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$, *unde $\mathcal{S}$ este frontiera piramidei delimitată de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = a$.*

6) $I = \iint_{\mathcal{S}}\left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right)dS$, *unde $\mathcal{S}$ este frontiera domeniului spaţial $V = \left\{(x,y,z),\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2} \leq \dfrac{z^2}{b^2},\ 0 \leq z \leq b\right\}$.*

7) $I = \iint_{\mathcal{S}} yz\,dydz + zx\,dzdx + xy\,dxdy$, *unde $\mathcal{S}$ este frontiera unui domeniu spaţial V.*

8) $I = \iint_{\mathcal{S}} xyz\,(x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy)$, *unde $\mathcal{S}$ este frontiera domeniului spaţial $V = \left\{(x,y,z),\ x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$.*

9) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^3dydz + x^2y\,dzdx + x^2z\,dxdy$, *unde $\mathcal{S}$ este frontiera domeniului spaţial $V = \left\{(x,y,z),\ x^2+y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq a\right\}$, $a > 0$.*

10) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este sfera* $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

11) $I = \iint_{\mathcal{S}} x\, dydz + y\, dzdx + \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este frontiera domeniului spaţial* $V = \left\{(x,y,z)\,,\ x^2+y^2+z \leq \dfrac{1}{4},\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

12) $I = \iint_{\mathcal{S}} y^2 z\, dydz + xz\, dzdx + x^2\, dxdy$, *unde* $\mathcal{S}$ *este frontiera domeniului spaţial* V *mărginit de paraboloidul* $z = x^2 + y^2$, *cilindrul* $x^2 + y^2 = 1$, *situat în primul octant.*

13) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, *nde* $\mathcal{S}$ *este frontiera tetraedrului cu vârfurile în punctele* $O\,(0,0,0)$, $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,1,0)$, $C\,(0,0,1)$.

R: 1) Deoarece $\mathbf{F}\,(x,y,z) = x^3 y\,\mathbf{i} + x^2 y^3\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$ şi $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3\left(2x^2y^2+1\right)$, putem scrie

$$I = \iiint_V (\operatorname{div}\mathbf{F})\, d\tau = 3\iiint_V \left(2x^2y^2+1\right) dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} \left(2x^2y^2+1\right) dz,$$

unde $D = \left\{(x,y)\,,\ x^2+y^2 \leq 3\right\}$. Se obţine $I = \dfrac{297}{8}\pi$. 2) $I = 3a^4$. 3) $I = \dfrac{12}{5}\pi a^5$. 4) $I = \dfrac{3}{2}\pi abc^2$. 5) $I = \dfrac{1}{2}a^3$. 6) $I = \dfrac{1}{2}\pi a^2 b^2$. 7) $I = 0$. 8) $I = \dfrac{1}{8}a^6$. 9) $I = \dfrac{5}{4}\pi a R^4$. 10) $I = \dfrac{8}{3}\pi R^3\,(a+b+c)$. 11) $I = \dfrac{1}{96}\pi\left(\dfrac{8}{3+2\sqrt{2}} - \dfrac{20}{9+4\sqrt{5}}\right)$. 12) $I = \dfrac{1}{8}\pi$. 13) $I = \dfrac{1}{12}$.

11.62 *Să se calculeze masa cubului de densitate* $\rho\,(x,y,z) = x+y+z$, *care ocupă domeniul spaţial* $V = [0,a]\times[0,a]\times[0,a]$, $a > 0$.

R: $\mathcal{M} = \dfrac{3}{2}a^4$.

11.63 *Să se calculeze masa corpului de densitate* $\rho\,(x,y,z) = x$, *care ocupă domeniul spaţial* V *mărginit de suprafeţele* $x^2 = 2y$, $y+z=1$, $2y+z=2$.

R: $\mathcal{M} = \dfrac{8}{35}\sqrt{2}$.

11.64 *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen care ocupă domeniul spaţial*

$$V = \left\{(x,y,z)\,,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}.$$

R: $G\left(\dfrac{3a}{8}, \dfrac{3b}{8}, \dfrac{3c}{8}\right)$.

11.65 *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen care ocupă domeniul spaţial mărginit de suprafeţele* $x^2+y^2 = z$, $x+y+z = 0$.

R: $G\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{6}\right)$.

11.66 *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen care ocupă domeniul spaţial*

$$V = \left\{(x, y, z),\ x^2 + y^2 \leq 2z,\ x + y \geq z\right\}.$$

R: $G\left(1, 1, \dfrac{5}{3}\right)$.

11.67 *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen care ocupă domeniul spaţial*

$$V = \left\{(x, y, z),\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ z \geq by,\ z \geq 0\right\},\ b > 0.$$

R: $G\left(0, \dfrac{3}{16}\pi a, \dfrac{3}{32}\pi ab\right)$.

11.68 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa* Oz *al corpului omogen* $(\rho = 1)$, *care ocupă domeniul spaţial mărginit de suprafeţele* $x^2+y^2+z^2 = 2$, $x^2+y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

R: $I_z = \dfrac{4}{15}\pi\left(4\sqrt{2} - 5\right)$.

11.69 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea ale piramidei omogene* $(\rho = 1)$, *mărginită de planele de coordonate şi de planul* $x + y + z = 1$.

R: $I_x = I_y = I_z = \dfrac{1}{30}$, $I_0 = \dfrac{1}{20}$.

11.70 *Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate ale corpului omogen* $(\rho = 1)$, *care ocupă domeniul spaţial mărginit de suprafeţele* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$, $c > 0$.

R: $I_{yz} = \dfrac{1}{5}\pi a^3bc$, $I_{zx} = \dfrac{1}{5}\pi ab^3c$, $I_{xy} = \dfrac{1}{5}\pi abc^3$.

11.71 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa* Oz *al corpului omogen* $(\rho = 1)$, *care ocupă domeniul spaţial*

$$V = \left\{(x, y, z),\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2},\ 0 \leq z \leq h\right\},\ h > 0.$$

R: $I_z = \dfrac{1}{5}\pi\dfrac{ab}{c^2}h^5$.

11.72 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu planul* Oxy *al corpului având densitatea* $\rho(x, y, z) = \dfrac{z}{\left(x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2\right)^2}$, *care ocupă domeniul spaţial*

$$V = \left\{(x, y, z),\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq a\right\},\ a > 0.$$

R: $I_{xy} = \frac{1}{12}\pi a^2 \ln\left(\frac{16^3}{27}a^4\right)$.

11.73 *Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu originea al corpului omogen mărginit de sfera de rază* 2 *cu centrul în origine.*

R: $I_0 = \frac{128}{5}\pi$.

Capitolul 12

Ecuaţii diferenţiale ordinare

12.1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

12.1 *Să se integreze ecuaţia* $(t^2 - x^2)\,dt - 2tx\,dx = 0$ *şi apoi să se determine curba integrală care trece prin punctul* $(1,1)$.

R: Avem $P(t,x) = t^2 - x^2$, $Q(t,x) = -2tx$ şi $P_x = Q_t = -2x$, deci membrul stâng al ecuaţiei date este o diferenţială exactă. Atunci integrala generală este dată de

$$\int_{t_0}^{t} (\tau^2 - x_0^2)\,d\tau - 2\int_{x_0}^{x} t\xi\,d\xi = C, \quad (t_0, x_0) \in D.$$

sau $\dfrac{1}{3}t^3 - tx^2 = C$. Soluţia particulară care satisface condiţia iniţială dată este $t^3 - 3tx^2 + 2 = 0$.

12.2 *Să se găsească integrala particulară a ecuaţiei* $\left(t + e^{\frac{t}{x}}\right) dt + e^{\frac{t}{x}}\left(1 - \dfrac{t}{x}\right) dx = 0$, *care verifică condiţia iniţială* $x\,(0) = 2$.

R: $\dfrac{1}{2}t^2 + xe^{\frac{t}{x}} = 2$.

12.3 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale care provin din anularea unei diferenţiale exacte:*

1) $\left(3t^2 + 6tx^2\right) dt + \left(6t^2x + 4x^3\right) dx = 0$.
2) $(t + x)\,dt + (t + 2x)\,dx = 0$.
3) $\left(t^2 + 2t + x^2\right) dt + 2tx\,dx = 0$.
4) $\left(t^3 - 3tx^2 + 2\right) dt - \left(3t^2x - x^2\right) dx = 0$.
5) $(e^t + x + \sin x)\,dt + (e^x + t + t\cos x)\,dx = 0$.
6) $(t + x - 1)\,dt + (e^x + t)\,dx = 0$.
7) $\left(\dfrac{x}{t^2 + x^2} - x\right) dt + \left(e^x - t - \dfrac{t}{t^2 + x^2}\right) dx = 0$.
8) $\left(\operatorname{tg} x - \dfrac{x}{\sin^2 t}\right) dt + \left(\operatorname{ctg} t + \dfrac{t}{\cos^2 x}\right) dx = 0$.

R: 1) $t^3 + 3t^2x^2 + x^4 = C$. 2) $\frac{1}{2}t^2 + tx + x^2 = C$. 3) $\frac{1}{3}t^3 = tx^2 + x^2 = C$.
4) $\frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t + \frac{1}{3}x^3 = C$. 5) $e^t + tx + t\sin x + e^x = C$. 6) $e^x + \frac{1}{2}t^2 + tx - t = C$.
7) $\operatorname{arctg}\frac{t}{x} - tx + e^x = C$. 8) $t\operatorname{tg} x + x\operatorname{ctg} t = C$.

12.4 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale care provin din anularea unei diferenţiale exacte:*
1) $\left(e^{t+x} + 3t^2\right)dt + \left(e^{t+x} + 4x^3\right)dx = 0$, *cu* $x(0) = 0$.
2) $(\arcsin t + 2tx)\,dt + \left(t^2 + 1 + \operatorname{arctg} x\right)dx = 0$.
3) $\left(\ln x - 5x^2 \sin 5t\right)dt + \left(\frac{t}{x} + 2x\cos 5t\right)dx = 0$, *cu* $x(0) = e$.
4) $[\sin x + (1 - x)\cos t]\,dt + [(1 + t)\cos x - \sin t]\,dx = 0$.
5) $\left(2txe^{t^2} + \ln x\right)dt + \left(e^{t^2} + \frac{t}{x}\right)dx = 0$, *cu* $x(0) = 1$.
6) $(t + x + 1)\,dt + \left(t - x^2 + 3\right)dx = 0$.
7) $(\sin tx = tx\cos tx)\,dt + t^2\cos tx\,dx = 0$.
8) $\left(t^3 + tx^2\right)dt + \left(t^2x + x^3\right)dx = 0$.

R: 1) $e^{t+x} + t^3 + x^4 = 1$. 2) $t\arcsin t + \sqrt{1 - t^2} + t^2x + x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2} + x = C$.
3) $t\ln x + x^2\cos 5t = e^2$. 4) $(1 + t)\sin x + (1 - x)\sin t = C$. 5) $xe^{t^2} + t\ln x = 1$.
6) $\frac{1}{2}t^2 + t + tx - \frac{1}{3}x^3 = 3x = C$. 7) $t\sin tx = C$. 8) $t^4 + 2t^2x^2 + x^4 = C$.

12.5 *Să se determine soluţia ecuaţiei* $(x^2 + 1)dt + (2t + 1)x^2\,dx = 0$, *care trece prin punctul* $(1, 0)$.

R: Separând variabilele, avem $\frac{1}{2t+1}\,dt + \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = 0$, cu soluţia generală

$$\frac{1}{2}\ln(2t + 1) + x - \operatorname{arctg} x = C.$$

Soluţia particulară care safisface condiţia dată este $\frac{1}{2}\ln(2t + 1) + x - \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\ln 3$.

12.6 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:*

1) $x\,dt + t\,dx = 0$.	2) $tx' - x = x^3$.
3) $txx' = 1 - t^2$.	4) $\operatorname{tg} t \sin^2 x\,dt + \operatorname{ctg} x \cos^2 t\,dx = 0$.
5) $dx = \left(t^2 + 1\right)\left(x^2 + 1\right)dt$.	6) $\left(t^2 - 1\right)x' - tx = 0$.
7) $x' + \sin(t + x) = \sin(t - x)$.	8) $x' = \operatorname{sh}(t + x) + \operatorname{sh}(t - x)$.

R: 1) Ecuaţia se mai scrie, separând variabilele: $\frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{x}\,dx = 0$. De unde $\ln|t| + \ln|x| = \ln|C|$, sau $tx = C$.
2) $t^2\left(1 + x^2\right) = Cx^2$. 3) $x^2 - 2\ln t + t^2 = C$. 4) $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{tg}^2 t + C$.
5) $x = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}t^3 + t + C\right)$. 6) $x^2 = C\left(t^2 - 1\right)$. 7) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 2\sin t = C$.
8) $x = \ln[\operatorname{tg}(\operatorname{ch} t + C)]$.

12.7 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile, cu condiţiile iniţiale precizate:*

1) $(1+e^t)\,xx' = e^t$, *cu* $x(0) = 1$.
2) $\left(1+e^{2t}\right)x^2dx = e^t dt$, *cu* $x(0) = 0$.
3) $x' + \cos(t+2x) = \cos(t-2x)$, *cu* $x(0) = \dfrac{\pi}{4}$.
4) $e^{1+t^2}\operatorname{th} x\, dt - \dfrac{1}{t-1}e^{2t}dx = 0$, *cu* $x(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
5) $x' = e^{t+x} + e^{t-x}$, *cu* $x(0) = 0$.
6) $x(t+2)\,dt + t(x-1)\,dx = 0$, *cu* $x(1) = 1$.
7) $t\left(x^6+1\right)dt + x^2\left(t^4+1\right)dx = 0$, *cu* $x(0) = 1$.

R: 1) $x^2 = 1 + 2\ln\dfrac{1+e^t}{2}$. 2) $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} e^t$. 3) $\ln|\operatorname{tg} x| = 4(1-\cos t)$.
4) $\ln\sin^2 x = e^{(x-1)^2} - 1$. 5) $x = \ln\left(e^t + \dfrac{\pi}{4} - 1\right)$. 6) $t + x + 2\ln t - \ln x = 2$.
7) $3\operatorname{arctg} t^2 + 2\operatorname{arctg} x^3 = \dfrac{\pi}{2}$.

12.8 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile:*

1) $(\cos t - \sin t + 1)\,x' = \cos x - \sin x - 1$.
2) $2t\sqrt{1-x^2} = x'\left(1+t^2\right)$.
3) $e^t\sin^3 x + \left(1+e^{2t}\right)(\cos x)\,x' = 0$.
4) $x^2(\sin t) + \left(\cos^2 t\right)(\ln x)\,x' = 0$.
5) $x' = \sin(t-x)$.
6) $x + tx' = a(1+tx)$.
7) $(tx-1)^2\,tx' + \left(t^2x^2+1\right)x = 0$.
8) $t\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+t^2}\,x' = 0$.

R: 1) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = C\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)$. 2) $x = \sin\left[C\ln\left(1+t^2\right)\right]$.
3) $\operatorname{arctg} e^t = \dfrac{1}{2\sin^2 x} + C$. 4) $x = (1 + \ln x + Cx)\cos t$. 5) $t + C = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{x-t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
6) $1 + tx = Ce^{at}$. 7) Cu schimbarea de funcţie $u = tx$, obţinem $x^2 = Ce^{tx - \frac{1}{tx}}$.
8) $\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1+x^2} = C$.

12.9 *Să se determine un factor integrant şi să se integreze ecuaţia*

$$(t^3\sin x - 2x)dt + (t^4\cos x + t)dx = 0.$$

R: Avem $P_x = t^3\cos x - 2$, $Q_t = 4t^3\cos x + 1$ şi deci

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = -\frac{3}{t}$$

este funcţie numai de t. Ca atare avem $\dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{dt} = -\dfrac{3}{t}$ şi o soluţie particulară este $\mu = \dfrac{1}{t^3}$. Inmulţind ecuaţia cu μ, obţinem

$$\left(\sin x - \frac{2x}{t^3}\right)dt + \left(t\cos x + \frac{1}{t^2}\right)dx = 0$$

a cărei soluţie generală este $t\sin x + \dfrac{x}{t^2} = C$.

12.10 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale ştiind că admit un factor integrant de forma $\mu = \mu(t)$:*

$$\begin{aligned}
&1)\ \left(2tx + t^2x + \frac{1}{3}x^3\right) dt + \left(t^2 + x^2\right) dx = 0.\\
&2)\ \left(t + x^2\right) dt - 2tx\, dx = 0.\\
&3)\ (t \sin x + x \cos x)\, dt + (t \cos x - x \cos x)\, dx = 0.\\
&4)\ (t + \sin t + \sin x)\, dt + \cos x\, dx = 0.
\end{aligned}$$

R: 1) $\mu = e^t$, $xe^t\left(t^2 + \frac{1}{3}x^2\right) = C$. 2) $\mu = \frac{1}{t^2}$, $\ln|t| - \frac{1}{t}x^2 = C$.
3) $\mu = e^t$, $(t \sin x + x \cos x - \sin x)\, e^t = C$.
4) $\mu = e^t$, $2e^t \sin x + 2e^t (t - 1) + e^t (\sin t - \cos t) = C$.

12.11 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale ştiind că admit un factor integrant de forma $\mu = \mu(x)$:*

1) $x(1 + tx)\, dt - t\, dx = 0$. 2) $x\, dt - \left(t + x^2\right) dx = 0$.
3) $2tx(\ln x)\, dt + \left(t^2 + x^2\sqrt{1 + x^2}\right) dx = 0$. 4) $\left(1 + 3t^2 \sin x\right) dt - t\operatorname{ctg} x\, dx = 0$.

R: 1) $\mu = \frac{1}{x^2}$, $\frac{t}{x} + \frac{1}{2}t^2 = C$. 2) $t = x(x + C)$.
3) $\mu = \frac{1}{x}$, $t^2 \ln|x| + \frac{1}{3}\left(x^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}} = C$. 4) $\mu = \frac{1}{\sin x}$, $\frac{t}{\sin x} + t^3 = C$.

12.12 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale ştiind că admit un factor integrant de forma indicată:*

$$\begin{aligned}
&1)\ (t - x)\, dt + (t + x)\, dx = 0,\ \mu = \mu\left(t^2 + x^2\right).\\
&2)\ tx^2 dt + \left(t^2x - t\right) dx = 0,\ \mu = \mu(tx)\\
&3)\ \left(2t^3 + 3t^2x + x^2 - x^3\right) dt + \left(2x^3 + 3tx^2 + t^2 - t^3\right) dx = 0,\ \mu = \mu(t + x).\\
&4)\ \left(t^2 + x^2 + 1\right) dt - 2tx\, dx = 0,\ \mu = \mu\left(x^2 - t^2\right).\\
&5)\ (t - tx)\, dt + \left(t^2 + x\right) dx = 0,\ \mu = \mu\left(t^2 + x^2\right).\\
&6)\ \left(3t + 2x + x^2\right) dt + \left(t + 4tx + 5x^2\right) dx = 0,\ \mu\left(t + x^2\right).
\end{aligned}$$

R: 1) $\mu = \frac{1}{t^2 + x^2}$, $\frac{1}{2}\ln\left(t^2 + x^2\right) - \operatorname{arctg}\frac{t}{x} = C$. 2) $tx - \ln|x| = C$.
3) $t^3 + tx + x^3 = C(t + x)$. 4) $\mu = \left(x^2 - t^2 + 1\right)^{-2}$, $x^2 - t^2 + 1 = Cx$.
5) $\mu = \left(t^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}$, $x - 1 = C\sqrt{t^2 + x^2}$. 6) $\mu = t + x^2$, $(t + x)\left(t + x^2\right)^2 = C$.

12.13 *Să se găsească soluţia ecuaţiei omogene $t^2 + 2x^2 = txx'$, care satisface condiţia iniţială $x(1) = 2$.*

R:Cu schimbarea de variabilă $x = ty$, ecuaţia devine $\frac{ydy}{1 + y^2} = \frac{dt}{t}$, cu soluţia generală $t = C\sqrt{1 + y^2}$. Inlocuind pe y, avem $t^2 = C\sqrt{t^2 + x^2}$. Condiţia iniţială determină pe $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Soluţia particulară căutată este $t^2\sqrt{5} = \sqrt{t^2 + x^2}$.

12.14 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale omogene:*

$$\begin{array}{lll} 1)\ tx' = x - t. & 2)\ tx' = x + te^{\frac{x}{t}}. & 3)\ tx' = -t - x. \\ 4)\ t^2 x' = x\,(t - x). & 5)\ tx' = x + t\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{t}. & 6)\ (t - x)\,x' = t + x. \\ 7)\ tx' = x + t\cos^2\frac{x}{t}. & 8)\ 2t^2 x' = t^2 + x^2. & 9)\ txx' + 2tx + t^2 = 0. \end{array}$$

R: 1) Prin schimbarea de funcţie $x = ty$ ecuaţia se transformă într-o ecuaţie cu variabile separabile: $y' = -\frac{1}{t}$, de unde $x = t\ln\frac{C}{t}$.

2) Se obţine $ty' = e^y$, de unde $x = -t\ln\ln\frac{C}{t}$.

3) Se obţine $ty' = -1 - 2y$, de unde $x = \frac{C}{t} - \frac{t}{2}$. 4) $t = Ce^{\frac{t}{x}}$.

5) $\sin\frac{x}{t} = Ct$. 7) $\mathrm{tg}\,\frac{x}{t} = \ln(Ct)$. 8) $2t = (t - x)\ln(Ct)$. 9) $\ln|t + x| + \frac{t}{t + x} = C$.

12.15 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale omogene, cu condiţiile iniţiale precizate:*

$$\begin{array}{l} 1)\ tx'\sin\frac{x}{t} + t = x\sin\frac{x}{t},\ \ cu\ x(1) = 0. \\ 2)\ t^2 x' = x^2 + tx + t^2,\ \ cu\ x(1) = 2. \\ 3)\ 4tx\left(t^2 + x^2\right)x' + x^4 + 6t^2x^2 + t^4,\ \ cu\ x(1) = 0. \\ 4)\ \left(x - 3t\sin\frac{3t}{x}\right)x' + 3x\sin\frac{3t}{x} = 0,\ \ cu\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1. \end{array}$$

R: Avem:
1) $te = e^{\cos\frac{x}{t}}$. 2) $\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2t} - 2\ln|t| = \frac{\pi}{4}$. 3) $t^5 + 10t^3x^2 + 5tx^4 = 1$. 4) $\ln|x| - \cos\frac{3t}{x} = 1$.

12.16 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene:*

$$\begin{array}{ll} 1)\ (t + x - 3)\,x' = t - x + 1. & 2)\ (t - 2x + 3)\,x' = 2t - 4x + 1. \\ 3)\ (t - x + 4)\,x' + t + x - 2 = 0. & 4)\ (2t + 2x - 1)\,x' + t + x + 1 = 0. \\ 5)\ (t - x - 2)\,x' + t + x = 0. & 6)\ (3t - 7x - 3)\,x' = 3x - 7t + 7. \\ 7)\ (3t + 2x - 5)\,x' + 2t + 3x - 5 & 8)\ (4t + 2x + 1)\,x' + 8t + 4x + 1 = 0. \\ 9)\ (t - 2x + 3)\,x' + 2t + x - 1 = 0. & 10)\ (6t + 2x - 10)\,x' = 2t + 9x - 20. \end{array}$$

R: 1) $t^2 - 2tx - x^2 + 2t + 6x = C$. 2) $(1 - 3t + 6x)^{\frac{10}{9}}\,e^{\frac{4t-2x}{3}} = C$.
3) $t^2 + 2tx - x^2 - 4t + 8x = C$. 4) $t + 2x + 3\ln|t + x - 2| = C$.
5) $x^2 - 2tx - t^2 + 4x = C$. 6) $(t + x - 1)^5\,(t - x - 1)^2 = C$.
7) $x^2 + 3tx + t^2 - 5t - 5x = C$. 8) $(4t + 2x + 1)^2 = 4t + C$.
9) $t^2 + tx - x^2 - t + 3x = C$. 10) $(x - 2t)^2 = C\,(t + 2x - 5)$.

12.17 *Să se integreze ecuaţia liniară neomogenă* $x' = x\,\mathrm{tg}\,t + \cos t$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$.

R: Ecuaţia omogenă corespunzătoare, $x' = x\,\mathrm{tg}\,t$, are soluţia generală $x(t) = C\cdot\frac{1}{\cos t}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$. Căutăm pentru ecuaţia neomogenă o soluţie particulară de forma

$x^*(t) = u(t) \cdot \dfrac{1}{\cos t}$. Se obţine pentru u ecuaţia $u' = \cos^2 t$, de unde $u(t) = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}\sin 2t$. In consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei date este

$$x(t) = C \cdot \frac{1}{\cos t} + (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t) \cdot \frac{1}{\cos t}, \quad t \in R \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}.$$

12.18 *Să se integreze următoarele ecuaţii liniare de ordinul întâi:*

1) $x' - x\operatorname{ctg} t + 2t\sin t = 0.$ 2) $\left(1+t^2\right)x' + x - \operatorname{arctg} t = 0.$
3) $x' + ax - be^{pt} = 0,\ a, b, p \in \mathbf{R}.$ 4) $tx' - \dfrac{1}{t+1}x - t + 1 = 0.$
5) $\left(t^2-1\right)^{\frac{3}{2}} x't^3 + 3tx\sqrt{t^2-1} = 0.$ 6) $\sqrt{1+t^2}\,x' + x + t - \sqrt{1+t^2} = 0.$
7) $t\left(t^3+1\right)x' + \left(2t^3-1\right)x = \dfrac{t^3-2}{t}.$ 8) $x' - \dfrac{n}{t+1}x = e^t\left(t+1\right)^n,\ n \in \mathbf{N}.$

R: 1) $x(t) = t^2\sin t + C\sin t$. 2) $x(t) = \operatorname{arctg} t - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} t}$.
3) $x(t) = \dfrac{b}{a+p}e^{pt} + Ce^{-at}$, pentru $p \neq -a$ şi $x(t) = (bt + C)e^{-at}$, pentru $p = -a$.
4) $x(t) = t + 1 + \dfrac{C}{t+1}e^t$. 5) $x(t) = \dfrac{1}{4}\left(C - t^4\right)\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}$.
6) $x(t) = \dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + C\right)$.
7) $x(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{Ct}{t^3+1}$. 8) $x(t) = \left(e^t + C\right)(t+1)^n$.

12.19 *Să se integreze următoarele ecuaţii liniare de ordinul întâi, cu condiţiile iniţiale precizate:*

1) $x' = \dfrac{x}{1-t^2} - t - 1,\ cu\ x(0) = 0.$ 2) $tx' + x = e^t,\ cu\ x(a) = b\ \ (a \neq 0).$
3) $tx' - nx = t^{n+1}\ln t,\ cu\ x(1) = 0.$ 4) $x'\cos^2 t + x - \operatorname{tg} t = 0\ cu\ x(0) = 0.$
5) $tx' - nx = t^{n+1}e^t,\ cu\ x(1) = 1.$ 6) $tx' + \left(2t^2-1\right)x = 2t^2 - 1,\ cu\ x(1) = 1 - \dfrac{1}{e}.$

R: 1) $x(t) = \left(\dfrac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin t\right)\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$. 2) $x(t) = \dfrac{1}{t}\left(e^t - e^a + ab\right)$.
3) $x(t) = \dfrac{1}{4}\left(t^n - t^{n+2}\right) + \dfrac{1}{2}t^{n+2}\ln|t|$. 4) $x(t) = -1 + \operatorname{tg} t + e^{-\operatorname{tg} t}$.
5) $x(t) = t^n\left(e^t - e + 1\right)$. 6) $x(t) = 1 - te^{-t^2}$.

12.20 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli:*

1) $tx' + x + t^t x^2 = 0.$ 2) $2txx' - x^2 + t = 0.$
3) $3tx' = x\left(1 + t\sin t - 3x^3\sin t\right).$ 4) $x' = 2tx + t^3\sqrt{x}.$
5) $x' = tx - tx^3.$ 6) $tx' + x = x^2\ln t.$
7) $3tx^2x' - 2x^3 = t^3.$ 8) $2x'\sin t + x\cos t = x^3\sin^2 t.$

R: 1) $x\left(t^2+Ct\right)=1$. 2) $x^2=t\ln\frac{C}{t}$. 3) $x^3\left(3+Ce^{\cos t}\right)=t$.
4) $x=\left(Ce^{\frac{t^2}{2}}-\frac{t^2+2}{2}\right)^2$. 5) $\left(1+Ce^{-t^2}\right)x^2=1$. 6) $x\left(1+Ct+\ln t\right)=1$.
7) $x^3=t^3+Ct^2$. 8) $x^2\left(C-t\right)\sin t=1$.

12.21 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli:*

1) $3t^2dt=\left(t^3+e^x\right)dx$. 2) $txdt+\left(t^2+x^2+1\right)dx$.
3) $tx'+x=t^3x^4$. 4) $\left(t^2\ln x-t\right)dx=x\,dt$.
5) $tx'+2x=3t^3x^{\frac{4}{3}}$. 6) $x'-\frac{2t}{1+t^2}x=4\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{arctg}t$.

R: 1) $t^3e^{-x}=x+C$. 2) $x^4+2t^2x^2+2x^2=C$. 3) $tx\sqrt[3]{3\ln\frac{C}{t}}=1$.
4) $t\left(1-Cx+\ln x\right)=1$. 5) $x^{-\frac{1}{3}}=Ct^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}t^3$. 6) $x\left(t\right)=\left(1+t^2\right)\left(C+\operatorname{arctg}^2t\right)^2$.

12.22 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli, cu condiţiile iniţiale precizate:*

1) $x'+x=e^{\frac{t}{2}}\sqrt{x},$ *cu* $x\left(0\right)=\frac{9}{4}$.
2) $\left(t^3+1\right)x'+3t^2x=x^2\left(t^3+1\right)^2\sin t,$ *cu* $x\left(0\right)=1$.
3) $\left(x^2+2x+t^2\right)x'+2t=0,$ *cu* $x\left(1\right)=0$.
4) $2\left(t^2-1\right)xx'-tx^2=t\left(t^2-1\right),$ *cu* $x\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$.
5) $x'-x\cos t=x^{n-1}\sin 2t,\ n\neq 1,\ n\in\mathbf{N}\setminus\{1,2\},$ *cu* $x\left(\pi\right)=1$.

R: 1) $x\left(t\right)=e^{-t}\left(\frac{1}{2}e^t+1\right)^2$. 2) $x\left(t\right)=\frac{1}{\left(t^3+1\right)\cos t}$. 3) $t^2+x^2=e^{-x}$.
4) $x^2=t^2-1+\sqrt{t^2-1}$. 5) $x^{1-n}=2\sin t+\frac{2}{n-1}+\frac{n-3}{n-1}e^{(n-1)\sin t}$.

12.23 *Să se arate că ecuaţiile diferenţiale de tip Riccati de forma* $t^2x'=at^2x^2+btx+c$, $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$, *admit soluţii particulare de forma* $x^*\left(t\right)=\alpha t^{-1}$, *dacă* $\left(b+1\right)^2-4ac\geq 0$. *Să se integreze apoi ecuaţiile diferenţiale:*

1) $2t^2x'=t^2x^2+1$. 2) $4t^2\left(x'+x^2\right)+1=0$.
3) $t^2x'+\left(2-tx\right)^2=0$. 4) $t^2x'=t^2x^2+tx+1$.

R: Intr-adevăr, $x^*\left(t\right)=\alpha t^{-1}$ este soluţie dacă $a\alpha^2+\left(b+1\right)\alpha+c=0$, ecuaţie care are rădăcini reale dacă $\left(b+1\right)^2-4ac\geq 0$. 1) O soluţie particulară este $x^*\left(t\right)=-t^{-1}$. Efectuând schimbarea de funcţie $x=-\frac{1}{t}+\frac{1}{y}$, obţinem ecuaţia liniară $2t^2y'=2ty-t^2$, a cărei soluţie generală este: $y\left(t\right)=\frac{t}{2}\left(C-\ln t\right)$. Deci, $x\left(t\right)=-\frac{1}{t}+\frac{2}{t\left(C-\ln|t|\right)}$.

2) $x\left(t\right)=\frac{1}{2t}+\frac{1}{t\left(C+\ln|t|\right)}$. 3) $x\left(t\right)=\frac{1}{t}+\frac{3t^2}{t^3+C}$. 4) $x\left(t\right)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t\left(C-\ln|t|\right)}$.

12.24 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Riccati, ştiind că admit soluţiile particulare indicate:*

$$
\begin{aligned}
&1)\ x' - x^2 + 2e^t x = e^t + e^{2t},\ x^*(t) = e^t.\\
&2)\ tx' - x^2 + (2t+1)\,x = t^2 + 2t,\ x^*(t) = t.\\
&3)\ x' + x^2 \sin t = 2\frac{\sin t}{\cos^2 t},\ x^*(t) = \frac{1}{\cos t}.\\
&4)\ \left(t^2 - 1\right) x' + x^2 - 2tx + 1 = 0,\ x^*(t) = t.\\
&5)\ t^2 x' + t^2 x^2 + tx = 4,\ x^*(t) = \frac{2}{t}.\\
&6)\ \left(1 + t^3\right) x' - x^2 - t^2 x = 2t,\ x^*(t) = t^2.\\
&7)\ x' - x^2 - \frac{1}{t} x + 9t^2 = 0,\ x^*(t) = 3t.\\
&8)\ t^2\left(x' + x^2\right) - 2\,(tx - 1) = 0,\ x^*(t) = \frac{2}{t}.
\end{aligned}
$$

R: 1) $x(t) = e^t + \dfrac{1}{C - t}$. 2) $x(t) = t + \dfrac{1}{Ct + 1}$. 3) $x(t) = \dfrac{1}{\cos t} + \dfrac{3\cos^2 t}{3C - \cos^3 t}$.
4) $\dfrac{1}{x - t} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| + C$. 5) $x(t) = \dfrac{2}{t} + \dfrac{4}{Ct^5 - t}$. 6) $x(t) = t^2 + \dfrac{1 + t^3}{C - t}$.
7) $x(t) = 3t + \dfrac{t}{6Ce^{-3t^2} - 1}$. 8) $x(t) = \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t\,(Ct - 1)}$.

12.25 *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale de tip Riccati, ştiind că admit soluţiile particulare de forma* $x^*(t) = \alpha t^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$*:*

1) $t\,(2t-1)\,x' + x^2 + (4t+1)\,x + 4t = 0$. 2) $\left(t^5 - 1\right) x' + 2tx^2 - t^4 x - 3t^2 = 0$.

R: 1) $n = 1$, $\alpha = 2$, $x(t) = \dfrac{4Ct^3 - 1}{Ct^4 - t}$. 2) $n = 3$, $\alpha = -1$, $x(t) = \dfrac{Ct^3 - 1}{t^2 - C}$.

12.2 Alte ecuaţii integrabile prin metode elementare

12.26 *Să se integreze ecuaţia* $x = a_n(x')^n + a_{n-1}(x')^{n-1} + \cdots + a_1 x' + a_0$.

R: Punem $x' = p$. Atunci $dx = p\,dt$, $dt = \dfrac{1}{p}\,dx$, de unde

$$t = \int \frac{1}{p}(na_n p^{n-1} + (n-1)a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1)\,dp.$$

Soluţia generală este dată de

$$\begin{cases} t = \dfrac{n}{n-1}a_n p^{n-1} + \dfrac{n-1}{n-2}a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_2 p + a_1 \ln p + C, \\ x = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0, \quad p > 0. \end{cases}$$

12.27 *Să se integreze ecuaţia* $x = (x')^2 \operatorname{tg} x'$.

R: $t = p\operatorname{tg} p - \ln(\cos p) + C$, $x = p^2 \operatorname{tg} p$.

12.28 *Să se integreze ecuaţiile:*

$$1)\ x^{\frac{2}{3}} + (x')^{\frac{2}{3}} = 1.\ \ 2)\ x^{\frac{2}{5}} + (x')^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}},\ a \neq 0.$$

R: 1) Luăm $x = \cos^3 \tau$ şi $x' = \sin^3 \tau$. Rezultă $t = 3\tau + 3\mathrm{tg}\,\tau + C$, $x = \cos^3 \tau$. 2) Luăm $x = a\sin^5 \tau$ şi $x' = a\cos^5 \tau$. Rezultă $t = 5\left(\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\tau - \mathrm{tg}\,\tau + \tau\right) + C$, $x = a\sin^5 \tau$.

12.29 *Să se integreze ecuaţiile:*

$$\begin{array}{ll} 1)\ t = 2x' + e^{x'}. & 2)\ t = x'\sin x' + \cos x'. \\ 3)\ t = \left(2\left(x'\right)^2 - 2x' + 1\right)e^{2x'}. & 4)\ t = x'\sin x'. \end{array}$$

R: 1) Punem $x' = p$. Atunci $t = 2p + e^p$, $dx = p\,dt = (2p + pe^p)\,dp$. Soluţia generală este dată de

$$t = 2p + e^p, \quad x = p^2 + (p-1)e^p + C.$$

2) $t = p\sin p + \cos p$, $x = \left(p^2 - 2\right)\sin p + 2p\cos p + C$.

3) $t = \left(2p^2 - 2p + 1\right)e^{2p}$, $x = \left(2p^3 - 3p^2 + 3p - \dfrac{3}{2}\right)e^{2p} + C$.

4) $t = p\sin p$, $x = \left(p^2 - 1\right)\sin p + p\cos p + C$.

12.30 *Să se integreze ecuaţia Lagrange* $x = 2tx' + (x')^2$.

R: Punem $x' = p$. Atunci $x = 2tp + p^2$ şi diferenţiem: $dx = 2p\,dt + 2t\,dp + 2p\,dp$. Dar $dx = p\,dt$ şi deci $\dfrac{dt}{dp} = -\dfrac{2}{p}t - 1$, care este o ecuaţie liniară, a cărei soluţie generală, pentru $p \neq 0$, este $t = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{p}{3}$, încât soluţia generală a ecuaţiei date se scrie

$$t = \frac{C}{p^2} - \frac{p}{3}, \quad x = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}, \quad p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Pentru $p = 0$ se obţine $x(t) \equiv 0$, care este o soluţie singulară.

12.31 *Să se integreze ecuaţia Clairaut* $x = tx' + (x')^n$.

R: Punem $x' = p$ şi derivând obţinem: $p = tp' + p + np^{n-1}p'$ sau $p'(t + np^{n-1}) = 0$. Avem: $p' = 0$, $p = C$, care dă soluţia generală $x(t) = Ct + C^n$. Sau $t = -np^{n-1}$, $x = (1-n)p^n$, care reprezintă o integrală singulară.

12.32 *Să se integreze următoarele ecuaţii de tip Lagrange sau Clairaut:*

$$\begin{array}{lll} 1)\ x = 2tx' + \ln x'. & 2)\ x = t\left(1 + x'\right) + \left(x'\right)^2. & 3)\ x = 2tx' + \sin x'. \\ 4)\ x = \dfrac{3}{2}tx' + e^{x'}. & 5)\ x = 2t + \left(x'\right)^2 - 4x'. & 6)\ x = \left(x'\right)^3 + t\left(x'\right)^2. \\ 7)\ x = \left(x'\right)^2 + t\left(x'\right)^2. & 8)\ x = tx' + \sqrt{1 + \left(x'\right)^2}. & 9)\ x = 1 + tx' + \left(x'\right)^2. \\ 10)\ x = 2tx' - 4\left(x'\right)^3. & 11)\ x = tx' + x'\left(1 - x'\right). & 12)\ t\left(x'\right)^2 - xx' = 1. \end{array}$$

R: 1) $t = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{1}{p}$, $x + \ln p + \dfrac{2C}{p} - 2$, $p > 0$.

2) $t = 2(1-p) + Ce^{-p}$, $x = [2(1-p) + Ce^{-p}](1+p) + p^2$.

3) $t = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{\cos p}{p^2} - \dfrac{\sin p}{p}$, $x = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{2\cos p}{p} - \sin p$, $p \neq 0$ şi $x = 0$, soluţie singulară.

4) $t = \dfrac{C}{p^3} - 2e^p\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{2}{p^3}\right)$, $x = \dfrac{3C}{2p^2} - 2e^p\left(1 - \dfrac{3}{p} + \dfrac{3}{p^2}\right)$, $p \neq 0$.

5) $t = 2p + C$, $x = p^2 + 2C$ şi $x = 2t - 4$, soluţie singulară.

6) $t = \dfrac{1}{(p-1)^2}\left(C - p^3 + \dfrac{3}{2}p^2\right)$, $x = \dfrac{p^2}{(p-1)^2}\left(C + p - \dfrac{p^2}{2}\right)$ şi $x = 0$, $x = t + 1$, soluţii singulare.

7) $t = \dfrac{1}{(p-1)^2} - 1$, $x = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}$ şi $x = 0$, $x = t + 1$, soluţii singulare.

8) $x = Ct + \sqrt{1 + C^2}$ şi $t^2 + x^2 = 1$, soluţie singulară.

9) $x = Ct + 1 + C^2$ şi $t = -2p$, $x = 1 - p^2$, soluţie singulară.

10) $t = 3p^2 + Cp^{-2}$, $x = 2p^3 - 2Cp^{-1}$, $p \neq 0$ şi $x = 0$, soluţie singulară.

11) $x = Ct + C(1 - C)$ şi $t = 2p - 1$, $x = p^2$, soluţie singulară.

12) $t = Cx + C^2$ şi $x^2 + 4t = 0$, soluţie singulară.

12.33 *Să se integreze ecuaţiile:*

$$1)\ xx' + (t - x)x' - t = 0.\quad 2)\ (x')^2 - (2x + t)x' + 2tx = 0.$$

R: 1) Ecuaţia se mai scrie: $t(x' - 1) + xx'(x' - 1) = 0$, deci $x' = 1$ sau $t = -xx'$. De unde: $x = t + C_1$ sau $x^2 + t^2 = C_2$.

2) Ecuaţia se mai scrie: $t(x' - 2x) = x'(x' - 2x)$, deci $x' = 2x$ sau $x' = t$. De unde $x = C_1 e^{2t}$ sau $x = \dfrac{1}{2}t^2 + C_2$.

12.34 *Să se integreze ecuaţia* $(x')^2 + tx' + 3x + t^2 = 0$.

R: Punem $x' = p$, avem $p^2 + tp + 3x + t^2 = 0$. Derivăm în raport cu t: $2pp' + p + tp' + 3p + 2t = 0$ sau $(2p + 1)(p' + 2) = 0$. Din $p' = -2$ urmează $p = -2t + C$, de unde soluţia generală

$$x(t) = -\frac{1}{3}[t^2 + t(C - 2t) + (C - 2t)^2], \quad t \in \mathbf{R}.$$

Apoi $t = -2p$ şi $x = -p^2$, care reprezintă o integrală singulară.

12.35 *Să se integreze ecuaţia* $t = \dfrac{1}{x'}x + (x')^n$.

R: Punem $x' = p$, avem $t = \dfrac{1}{p}x + p^n$. Derivăm în raport cu x. Obţinem $\dfrac{dp}{dx} \cdot (np^{n-1} - \dfrac{1}{p^2}) = 0$. Deci $\dfrac{dp}{dx} = 0$, $p = C$, de unde soluţia generală $t(x) = \dfrac{1}{C}x + C^n$, sau $x = np^{n+1}$, $t = (n+1)p^n$, care reprezintă o integrală singulară.

12.3 Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

12.36 *Să se găsească soluţia ecuaţiei* $x^{(5)} = 0$*, care satisface condiţiile iniţiale:*

$$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = -1,\ x^{(3)}(0) = 0,\ x^{(4)}(0) = 1.$$

R: Soluţia generală este $x(t) = \frac{C_1}{4!}t^4 + \frac{C_2}{3!}t^3 + \frac{C_3}{2!}t^2 + \frac{C_4}{1!}t + C_5$. Condiţiile iniţiale precizate conduc la soluţia particulară $x(t) = \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1$, $t \in \mathbf{R}$.

12.37 *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei* $x'' = \frac{1}{t}$.

R: $x\,(t) = t\ln|t| + C_1 t + C_2$.

12.38 *Să se determine soluţia ecuaţiei* $x''' = \sin t$*, care satisface condiţiile iniţiale* $x(0) = 1$*,* $x'(0) = -1$*,* $x''(0) = 0$*.*

R: Prin trei integrări succesive obţinem soluţia generală $x(t) = \cos t + \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3$. Soluţia problemei lui Cauchy este $x(t) = \cos t + t^2 - t$.

12.39 *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei* $t = x'' + \ln x''$*.*

R: Punem $x'' = \tau$. Atunci $t = \tau + \ln\tau$. Avem $dx' = \tau\,dt = \tau(1 + \frac{1}{\tau})\,\tau$. Se obţine soluţia generală $t = \tau + \ln\tau$, $x = \frac{1}{6}\tau^3 + \frac{3}{4}\tau^2 + C_1(\tau + \ln\tau) + C_2$.

12.40 *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei* $t = e^{x''} - (x'')^2$*.*

R: Punem $x'' = \tau$. Atunci $t = e^\tau - \tau^2$. Avem $dx' = \tau\,dt = \tau\,(e^\tau - 2\tau)\,d\tau$. De unde $x' = \tau e^\tau - e^\tau - \frac{2}{3}\tau^3 + C_1$. Apoi $dx = x'dt = \left(\tau e^\tau - e^\tau - \frac{2}{3}\tau^3 + C_1\right)(e^\tau - 2\tau)\,d\tau$. De unde

$$x = \left(\frac{1}{2}\tau - \frac{3}{4}\right)e^{2\tau} + \left(2\tau - 2 - \frac{2}{3}\tau^3 + C_1\right)e^\tau + \frac{4}{15}\tau^5 - C_1\tau^2 + C_2.$$

12.41 *Să se integreze ecuaţiile:* 1) $x'' = 1 - (x')^2$. 2) $(x''')^2 + (x'')^2 = 1$. 3) $(x''')^2 = 2x''$.

R: 1) O reprezentare parametrică a ecuaţiei este: $x' = \tau$, $x'' = 1 - \tau^2$. Din $dx' = d\tau$ şi $dx' = \left(1 - \tau^2\right)dt$, obţinem $dt = \frac{1}{1-\tau^2}d\tau$. Deci $t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tau}{1-\tau}\right| + C_1$. Din $dx = \tau\,dt = \frac{\tau}{1-\tau^2}d\tau$, de unde $x = -\frac{1}{2}\ln\left|1 - \tau^2\right| + C_2$.

2) O reprezentare parametrică a ecuaţiei este: $x'' = \cos\tau$, $x''' = \sin\tau$. Din $dx'' = -\sin\tau\,d\tau$ şi $dx'' = \sin\tau\,dt$, rezultă $dt = -d\tau$, deci $t = -\tau + C_1$. Din $dx' = \cos\tau\,dt = -\cos\tau\,d\tau$, urmează $x' = -\sin\tau + C_2$, iar din $dx = (-\sin\tau + C_2)\,dt = (\sin\tau - C_2)\,d\tau$, deducem $x = -\cos\tau - C_2\tau + C_3$.

3) Luăm $x''' = 2\tau$. Atunci $x'' = 2\tau^2$. Din $dx'' = 4\tau\, d\tau$ şi $dx'' = 2\tau\, dt$, rezultă $dt = 2\, d\tau$, deci $t = 2\tau + C_1$. Din $dx' = 2\tau^2 dt = 4\tau^2 d\tau$, urmează $x' = \dfrac{4}{3}\tau^3 + C_2$, iar din $dx = \left(\dfrac{4}{3}\tau^3 + C_2\right) dt = 2\left(\dfrac{4}{3}\tau^3 + C_2\right) d\tau$, deducem $x = \dfrac{2}{3}\tau^4 + 2C_2\tau + C_3$.

12.42 *Să se integreze ecuaţia* $x^{(3)} \cdot x^{(4)} = -1$.

R: O reprezentare parametrică este $x^{(3)} = \tau$, $x^{(4)} = -\dfrac{1}{\tau}$, $\tau \neq 0$. Obţinem $dx^{(3)} = d\tau$, $dx^{(3)} = -\dfrac{1}{\tau}\, dt$, deci $dt = -\tau\, d\tau$. Se obţine soluţia generală

$$t = -\frac{1}{2}\tau^2 + C_1, \quad x = -\frac{1}{105}\tau^7 + \frac{1}{8}C_1\tau^4 - \frac{1}{2}C_2\tau^2 + C_3.$$

12.4 Ecuaţii cărora li se poate micşora ordinul

12.43 *Să se integreze ecuaţia* $x^{(n)} \sin t - x^{(n-1)} \cos t + 1 = 0$.

R: Punem $x^{(n-1)} = u$ şi ecuaţia se transformă într-o ecuaţie liniară în u: $u' \sin t - u \cos t + 1 = 0$. Cu soluţia $u\,(t) = \cos t + C_1 \sin t$. Deci $x^{(n-1)} = \cos t + C_1 \sin t$, cu soluţia generală:

$$x\,(t) = \cos\left(t - \frac{n-1}{2}\pi\right) + C_1 \sin\left(t - \frac{n-1}{2}\pi\right) + \frac{C_2}{(n-2)!}t^{n-2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{1!}t + C_n.$$

12.44 *Să se integreze ecuaţia* $xx'' - (x')^2 = x^2$.

R: Ecuaţia nu conţine pe t explicit. Punem $x' = u$, $x'' = u\dfrac{du}{dx}$ şi obţinem ecuaţia $xu\dfrac{du}{dx} = u^2 + x^2$, care este o ecuaţie omogenă. Luând $u = xy$, obţinem $y\, dy = \dfrac{1}{x}\, dx$, de unde $y^2 = 2\ln|x| + C_1$, deci $x' = x\sqrt{2\ln x + C_1}$, cu soluţia $x = e^{\frac{1}{2}\left((t-C_2)^2 - C_1\right)}$.

12.45 *Să se integreze ecuaţiile:* 1) $txx'' + t\,(x')^2 - xx' = 0$. 2) $t^2xx'' = (x - tx')^2$.

R: Ecuaţiile sunt omogene în x, x', x''. 1) Cu schimbarea de funcţie $\dfrac{x'}{x} = u$, obţinem $x' = xu$, $x'' = x(u^2 + u')$ şi deci ecuaţia devine $tu' - u + 2tu^2 = 0$. Rezultă $x = C_2\sqrt{t^2 + C_1}$. 2) $x = C_2te^{-\frac{C_1}{t}}$.

12.46 *Să se integreze ecuaţia* $t^2xx'' + t^2(x')^2 - 5txx' + 4x^2 = 0$.

R: Ecuaţia este omogenă de ordinul patru în t, x, dt, dx, d^2x. Impărţind prin t^2 se poate pune sub forma $\dfrac{x}{t} \cdot tx'' + (x')^2 - 5\dfrac{x}{t} \cdot x' + 4\left(\dfrac{x}{t}\right)^2 = 0$. Punem $t = e^\tau$, $x = tu$ şi ecuaţia devine $uu'' + (u')^2 - 2uu' = 0$. Luând acum $u' = p$ obţinem ecuaţia liniară $\dfrac{dp}{du} + \dfrac{1}{u}\, p - 2 = 0$, cu soluţia $p\,(u) = \dfrac{1}{u}\left(u^2 + C_1\right)$. Deci $u' = \dfrac{1}{u}\left(u^2 + C_1\right)$. De unde $u^2\,(\tau) = C_2e^{2\tau} - C_1$. Rezultă $x^2 = t^2\left(C_2t^2 - C_1\right)$.

Capitolul 13

Ecuaţii şi sisteme diferenţiale liniare

13.1 Sisteme diferenţiale liniare de ordinul întâi

13.1 *Se dă sistemul:*

$$x' = -\frac{3}{t}x - \frac{1}{t}y,\ y' = \frac{1}{t}x - \frac{1}{t}y,\ t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x^1 = \frac{1}{t^2},\ y^1 = -\frac{1}{t^2},\ \ x^2 = \frac{1}{t^2}\ln t,\ y^2 = -\frac{1}{t^2}(1 + \ln t),$$

formează un sistem fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală a sistemului.

R: Soluţia generală este:

$$x(t) = \frac{1}{t^2}\left(C_1 + C_2 \ln t\right), \quad y(t) = -\frac{1}{t^2}\left(C_1 \ln t + C_2\left(1 + \ln t\right)\right).$$

13.2 *Se dă sistemul:*

$$x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t}y,\ y' = -\frac{4}{t}x + \frac{3}{t}y + 2,\ t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x^1 = t,\ y^1 = 2t,\ \ x^2 = t\ln t,\ y^2 = t(1 + 2\ln t),$$

formează un sistem fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală a sistemului.

R: O soluţie particulară a sistemului este: $x^*(t) = t\ln^2 t,\ y^*(t) = 2t(\ln^2 t + \ln t)$.

13.3 *Se dă sistemul:*

$$tx' = x + y,\ ty' = -y + \frac{t}{(t+1)^2} - \ln(t+1),\ t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x^1 = t,\ y^1 = 0, \quad x^2 = \frac{1}{t},\ y^2 = -\frac{2}{t},$$

formează un sistem fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală a sistemului.

R: O soluţie particulară a sistemului este: $x^* = \ln(t+1),\ y^* = \dfrac{t}{t+1} - \ln(t+1)$.

13.4 *Se dă sistemul:*

$$x' = \frac{4}{t}\,x - \frac{4}{t^2}\,y + \frac{1}{t},\ y' = 2\,x - \frac{1}{t}\,y + t,\ t \in (0, \infty).$$

Să se verifice că: $x_1(t) = 1$, $y_1(t) = t$ şi $x_2(t) = 2t^2$, $y_2(t) = t^3$, $t \in (0, \infty)$, formează un sistem fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală a sistemului.

R: Deoarece $W(t) = -t^3 \neq 0$, cele două soluţii formează un sistem fundametal de soluţii pentru sistemul dat şi deci soluţia generală a sistemului omogen corespunzător este

$$x(t) = C_1 + 2C_2\,t^2,\ y(t) = C_1\,t + C_2\,t^3.$$

Căutăm pentru sistemul neomogen o soluţie particulară de forma

$$x^*(t) = u(t) + 2t^2\,v(t),\ y(t) = t\,u(t) + t^3\,v(t).$$

Derivând şi înlocuind în sistem, obţinem

$$u' + 2t^2\,v' = \frac{1}{t},\ u' + t^3\,v' = t,$$

sau, rezolvând în privinţa lui u' şi v':

$$u' = 2 - \frac{1}{t}, v' = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3},$$

de unde, prin integrare $u(t) = 2t - \ln t,\ v(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2t^2}$. Inlocuind în $x^*(t)$ şi $y^*(t)$, obţinem soluţia particulară a sistemului neomogen

$$x^*(t) = 4t - 1 - \ln t, y^*(t) = 3t^2 - \frac{1}{2}t - t\ln t$$

şi deci soluţia generală a sistemului neomogen este

$$x(t) = C_1 + 2C_2\,t^2 + 4t - 1 - \ln t, \quad y(t) = C_1\,t + C_2\,t^3 + 3t^2 - \frac{1}{2}t - t\ln t,\ \ t > 0.$$

13.2 Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

13.5 *Să se determine soluţia generală a sistemului diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi:*

$$x' = 3y - 4z, \quad y' = -z, \quad z' = -2x + y.$$

R: Matricea transformării liniare asociate este

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică a transformării liniare T este $\lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, simple. Deci transformarea T poate fi adusă la expresia canonică. Vectorii proprii corespunzători sunt

$$\mathbf{u}^1 = (1,1,1), \quad \mathbf{u}^2 = (5,2,4), \quad \mathbf{u}^3 = (5,1,-3).$$

Deci funcţiile

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{-t}(1,1,1), \quad \mathbf{x}^2(t) = e^{-2t}(5,2,4), \quad \mathbf{x}^3(t) = e^{3t}(5,1,-3)$$

formează un sistem fundamental de soluţii. Soluţia generală a sistemului se scrie atunci

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{-2t} + 5C_3 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-2t} + \ C_3 e^{3t}, \\ z(t) = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} - 3C_3 e^{3t}, \end{array} \right. \quad t \in \mathbf{R}.$$

13.6 *Să se determine soluţia generală a sistemului*

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

R: Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0$ şi deci $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, iar vectorii proprii corespunzători $\mathbf{u}^1 = (1, i)$, $\mathbf{u}^2 = (1, -i)$. Un sistem fundamental de soluţii (complexe) va fi

$$\mathbf{x}^1(t) = (e^{it}, ie^{it}), \quad \mathbf{x}^2(t) = (e^{-it}, -ie^{-it}).$$

Prin schimbarea precedentă, obţinem sistemul fundamental de soluţii (reale)

$$\mathbf{y}^1(t) = (\cos t, -\sin t), \quad \mathbf{y}^2(t) = (\sin t, \cos t),$$

încât, soluţia generală a sistemului diferenţial dat se va scrie

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

13.7 *Să se determine soluţiile generale ale sistemelor:*

$$1) \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + 8y, \\ y' = -x - 3y. \end{array} \right.$$

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}$, $y(t) = C_1 \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{t\sqrt{2}} - C_2 \left(\sqrt{2} + 1\right) e^{-t\sqrt{2}}$.
2) $x(t) = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}$, $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

13.8 *Să se determine soluţia sistemului:* $x' = 2x + y$, $y' = x + 2y$, *care satisface condiţiile iniţiale:* $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

R: $x(t) =_1 e^{3t} - e^t$, $y(t) = 2e^{3t} + e^t$.

13.9 *Să se determine soluţia generală a sistemului* $x' = y$, $y' = -x + 2y$.

R: Ecuaţia caracteristică este $(\lambda - 1)^2 = 0$ şi deci $\lambda_1 = 1$, cu $m_1 = 2$, iar vectorul propriu corespunzător $\mathbf{u}^1 = (1, 1)$. Transformarea liniară T nu poate fi adusă la expresia canonică. Căutăm atunci soluţia generală sub forma $x(t) = (a + bt)e^t$, $y(t) = (c + dt)e^t$. Derivând şi înlocuind în sistem, obţinem pentru a, b, c, d sistemul: $a + b = c$, $b = d$, $a - c + d = 0$, $b - 2c + d = 0$, care este compatibil dublu nedeterminat. Luând $a = C_1$, $b = C_2$, găsim $c = C_1 + C_2$, $d = C_2$ a.î. soluţia generală va fi

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t, \quad y(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^t.$$

13.10 *Să se rezolve sistemul liniar:* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, *în care:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

R: Valorile proprii ale matricei A sunt: $\lambda_1 = 2$, $m_1 = 1$, $\mathbf{u}^1 = (2, 0, 1)$, $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$, $\mathbf{u}^2 = (1, 1, 1)$. O soluţie a sistemului este $\mathbf{x}^1(t) = (2, 0, 1)e^{2t}$. Corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 2$, căutăm o soluţie de forma: $\mathbf{x}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)e^t$. Se obţine prin identificare: $\mathbf{x}(t) = (C_2 + C_3 t, C_2 - C_3 + C_3 t, C_2 + C_3 t)e^t$. Soluţia generală este:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t)e^t, \\ y(t) = (C_2 - C_3 + C_3 t)e^t, \\ z(t) = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t)e^t. \end{cases}$$

13.11 *Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale omogene:*

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 2x - y. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

R: 1) $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $\lambda_1 = 3$, $m_1 = 2$. Căutăm soluţia sub forma:
$\mathbf{x}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t)e^{3t}$. Se obţine:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \; y(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}.$$

2) $\lambda^2 + 9 = 0$, $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Se obţin soluţiile complexe:

$$\mathbf{x}^1(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, 1\right) e^{3it}, \; \mathbf{x}^2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, 1\right) e^{-3it}.$$

Dar: $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\mathbf{x}^1(t)+\mathbf{x}^2(t)) = \left(\dfrac{1}{2}\cos 3t - \dfrac{3}{2}\sin 3t, \cos 3t\right), \\ \dfrac{1}{2i}(\mathbf{x}^1(t)-\mathbf{x}^2(t)) = \left(\dfrac{1}{2}\cos 3t + \dfrac{3}{2}\sin 3t, \sin 3t\right), \end{cases}$ sunt soluţii liniar independente reale.

Deci: $\begin{cases} x(t) = C_1\left(\dfrac{1}{2}\cos 3t - \dfrac{3}{2}\sin 3t\right) + C_2\left(\dfrac{3}{2}\cos 3t + \dfrac{1}{2}\sin 3t\right), \\ y(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t. \end{cases}$

3) $x(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)\, e^{4t}$, $y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{4t}$.

13.12 *Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale omogene:*

$$1)\ \begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x' = 12x - 5y, \\ y' = 5x + 12y. \end{cases} \quad 3\ \begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

R: Avem:

1) $x(t) = (C_1\cos 3t - C_2\sin 3t)\, e^{4t}$, $\quad y(t) = (C_1\sin 3t + C_2\cos 3t)\, e^{4t}$.
2) $x(t) = (C_1\cos 5t - C_2\sin 5t)\, e^{12t}$, $\quad y(t) = (C_1\sin 5t + C_2\cos 5t)\, e^{12t}$.
3) $x(t) = C_1\cos 3t + (5C_2 - 3C_1)\sin 3t$, $\quad y(t) = C_2\sin 3t + (2C_1 - 3C_2)\cos 3t$.

13.13 *Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale omogene:*

$$1)\ \begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ y' = -x + 5y - z, \\ z' = x - y + 3z. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = -x + 2y + 3z. \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

R: 1) $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Se obţine:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3 = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}, \\ y(t) = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}, \\ z(t) = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}. \end{cases}$$

2) $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20 = 0$, valorile proprii: $2, 3+i, 3-i$ şi deci:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^1(t) = (1,0,1) = (1,0,1)\, e^{2t}, \\ \mathbf{x}^2(t) = (1, 1+i, 2-i)e^{(3+i)t}, \\ \mathbf{x}^3(t) = (1, 1-i, 2+i)e^{(3-i)t}. \end{cases}$$

Soluţia reală este:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + (C_2\cos t + C_3\sin t)e^{3t}, \\ y(t) = (C_2(\cos t - \sin t) + C_3(\cos t + \sin t))\, e^{3t}, \\ z(t) = C_1e^{2t} + (C_2(2\cos t + \sin t) - C_3(\cos t - 2\sin t))\, e^{3t}. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} - C_2e^{-2t} + C_3e^{-t}, \\ y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{-t}, \\ z(t) = 2C_1e^{2t} - C_3e^{-t}. \end{cases}$$

13.14 *Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale omogene:*

$$1)\ \begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2z, \\ z' = 2x. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ x' = x + y. \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x' = 6x - 12y - z, \\ y' = x - 3y - z, \\ z' = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

R: Avem:

$$1)\ \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} \sin t\sqrt{3} + C_2 e^{-t} \cos t\sqrt{3} + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = -\frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{3}\right) e^{-t} \sin t\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(C_1\sqrt{3} - C_2\right) e^{-t} \cos t\sqrt{3} + C_3 e^{2t}, \\ z(t) = -\frac{1}{2}\left(C_1 - C_2\sqrt{3}\right) e^{-t} \sin t\sqrt{3} - \frac{1}{2}\left(C_1\sqrt{3} + C_2\right) e^{-t} \cos t\sqrt{3} + C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

2) $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $y(t) = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $z(t) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$.

$$3)\ \begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{t} + \frac{7}{3} C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ z(t) = -2C_1 e^{t} - \frac{8}{3} C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

13.15 *Să se rezolve sistemul omogen, cu condiţiile iniţiale precizate:*

$$\begin{cases} x' = 8y, \\ y' = -2z, \\ z' = 2x + 8y - 2z, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -4, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

R: $x(t) = -4e^{-2t} - 2\sin 4t$, $y(t) = e^{-2t} - \cos 4t$, $z(t) = e^{-2t} - 2\sin 4t$.

13.16 *Să se determine soluţia generală a sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare neomogene:*

$$1)\ \begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{t}, \\ y' = x + 2y + 3e^{4t}. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$$

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} + te^{t} - e^{4t}$, $y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} - (t+1)e^{t} - 2e^{4t}$.
2) $x(t) = C_1 t + C_2 + 2\sin t$, $y(t) = 2C_1 t - C_1 - 2C_2 - 3\sin t - 2\cos t$.

13.17 *Să se determine soluţia problemei lui Cauchy pentru sistemul:*

$$x' = x + y, \quad y' = -2x + 4y,$$

cu condiţiile iniţiale: $x(0) = 0$, $y(0) = -1$.

R: $x(t) = (1 - t)\cos t - \sin t$, $y(t) = (t - 2)\cos t + t\sin t$.

13.18 *Să se determine soluţia generală a sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:*

$$1)\ \begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x + 1. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2. \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x' = 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}, \\ y' = 2y - 2t - 1. \end{cases}$$

R: Avem:
1) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1,\qquad y(t) = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1.$
2) $x(t) = C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t + t^2,\quad y(t) = -C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \dfrac{1}{2}t^2.$
3) $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + t + t^2,\qquad y(t) = 2C_1e^{2t} + 1 + t.$

13.19 *Să se determine soluţia generală a sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:*

$$1)\ \begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 2x + 3y + t. \end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} x' = -y + e^{3t}, \\ y' = -x + 2e^{3t}. \end{cases}$$

R: Avem:
1) $x(t) = -\dfrac{3}{2}C_1 + 2C_2e^{7t} - \dfrac{3}{7}t^2 - \dfrac{6}{49}t - \dfrac{6}{343}$, $y(t) = C_1 + C_2e^{7t} - \dfrac{3}{49}t + \dfrac{2}{7}t^2 - \dfrac{3}{343}$.
2) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \dfrac{1}{8}e^{3t}$, $y(t) = -C_1e^t + C_2e^{-t} + \dfrac{5}{8}e^{3t}$.

13.20 *Să se rezolve următoarele sisteme, cu condiţiile iniţiale precizate:*

$$1)\ \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 3. \end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} x' = 3x + 8y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 6, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

R: Avem:
1) $x(t) = 2e^{3t} - e^t,\quad y(t) = 2e^{3t} + e^t.$
2) $x(t) = 4e^t + 2e^{-t},\quad y(t) = -e^t - e^{-t}.$

13.21 *Să se rezolve următoarele sisteme, cu condiţiile iniţiale precizate:*

$$1)\ \begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x + e^t, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} x' = 3x - y + \sin t, \\ y' = -4x + 3y + \cos t, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

R: Avem:
1) $x(t) = \dfrac{3}{4}e^t + \dfrac{5}{4}e^{-t} - 1 + \dfrac{1}{2}e^t t$, $y(t) = \dfrac{5}{4}e^t - \dfrac{5}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^t t - t$.
2) $x(t) = -\dfrac{9}{26}\cos t - \dfrac{3}{13}\sin t + \dfrac{75}{104}e^{5t} + \dfrac{5}{8}e^t$, $y(t) = -\dfrac{21}{26}\cos t - \dfrac{1}{26}\sin t - \dfrac{75}{52}e^{5t} + \dfrac{5}{4}e^t$.

13.22 *Să se determine soluţia generală a sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:*

$$1)\ \begin{cases} x' = 2x + y - 2z - t + 2, \\ y' = -x + 1, \\ z' = x + y - z + 1 - t. \end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z + 4t - 2e^{-t} - 4, \\ y' = 6x - y - 6z - 6t - 6, \\ z' = -8x + 3y + 9z - 3e^{-t} + 8t - 9. \end{cases}$$

R: Avem:

$$1)\ \begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2\sin t + C_3\cos t, \\ y(t) = -C_1e^t + C_2\cos t - C_3\sin t + t, \\ z(t) = C_2\sin t + C_3\cos t + 1. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t + t, \\ y(t) = -2C_1e^{2t} + 3C_2e^t + e^{-t}, \\ z(t) = 2C_1e^{2t} + (C_2t + C_3)\,e^t + 1. \end{cases}$$

13.3 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n

13.23 *Se dă ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordinul al doilea:*

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \quad t \in I.$$

Să se arate că dacă $\left(x^1(t), x^2(t)\right)$ *formează un sistem fundamental de soluţii al cărui wronskian este* $W(t)$*, atunci* W *este soluţie a ecuaţiei diferenţiale:* $W' + a_1(t)W = 0$ *şi să se deducă formula lui Abel - Ostrogradski - Liouville:*

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(t)dt\right), \quad t_0 \in I.$$

Generalizare.

R: Avem: $\left(x^i\right)'' + a_1(t)\left(x^i\right)' + a_2(t)x^i = 0$, pentru $i = 1, 2$. Dar,

$$W'(t) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ \left(x^1\right)' & \left(x^2\right)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ -a_1\left(x^1\right)' & -a_1\left(x^2\right)' \end{vmatrix} = -a_1(t)W(t).$$

13.24 *Se dă sistemul de funcţii liniar independente* $\left(x^1(t), x^2(t)\right)$*. Să se arate că ecuaţia diferenţială liniară omogenă a cărei soluţie generală este:*

$$x(t) = C_1x^1(t) + C_2x^2(t),$$

cu C_1 *şi* C_2 *constante arbitrare, este:*

$$\begin{vmatrix} x^1(t) & x^2(t) & x \\ \left(x^1(t)\right)' & \left(x^2(t)\right)' & x' \\ \left(x^1(t)\right)'' & \left(x^2(t)\right)'' & x'' \end{vmatrix} = 0.$$

Generalizare.

R: Derivând $x(t)$ de două ori, prin eliminarea lui C_1 şi C_2 între cele trei relaţii se obţine ecuaţia din enunţ.

13.25 *Să se formeze ecuaţia diferenţială omogenă al cărui sistem fundamental de soluţii este:*

1) $x^1 = \sin t, \quad x^2 = \cos t.$
2) $x^1 = e^t, \quad x^2 = te^t.$
3) $x^1 = t, \quad x^2 = t^2.$
4) $x^1 = e^t, \quad x^2 = e^t \sin t, \quad x^3 = e^t \cos t.$

R: 1) $x'' + x' = 0$. 2) $x'' - 2x' + x = 0$. 4) $x''' - 2tx' + 2x = 0$. 4) $x''' - 3x''4x' - 2x = 0$.

13.26 *Să se arate că ecuaţia diferenţială* $x'' + a^2x = 0$*,* $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *admite soluţiile* $x^1(t) = \cos at$*,* $x^2(t) = \sin at$ *şi să se scrie soluţia generală.*

R: Wronskianul sistemului $\left(x^1(t), x^2(t)\right)$ este

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos at & \sin at \\ -a\sin at & a\cos at \end{vmatrix} = a \neq 0.$$

Deci $\left(x^1(t), x^2(t)\right)$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia dată, iar soluţia ei generală este

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

cu C_1, C_2 constante arbitrare.

13.27 *Să se integreze ecuaţia* $x'' + a^2x = \cos at$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. *Să se găsească soluţia problemei lui Cauchy cu condiţiile iniţiale* $x\left(\dfrac{\pi}{a}\right) = 0$, $x'\left(\dfrac{\pi}{a}\right) = -\dfrac{\pi}{2a}$.

R: Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate este

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă sub forma

$$x^*(t) = u_1(t) \cos at + u_2(t) \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

în care $u_1'(t)$ şi $u_2'(t)$ verifică sistemul

$$u_1' \cos at + u_2' \sin at = 0, \quad -au_1' \sin at + au_2' \cos at = \cos at.$$

Rezultă

$$u_1' = -\frac{1}{2a} \sin 2at, \quad u_2' = \frac{1}{2a}(1 + \cos 2at).$$

De unde, până la constante aditive arbitrare, obţinem

$$u_1(t) = \frac{1}{4a^2} \cos 2at, \quad u_2(t) = \frac{1}{2a}\, t + \frac{1}{4a^2} \sin 2at.$$

Avem deci soluţia particulară

$$x^*(t) = \frac{1}{4a^2} \cos at + \frac{1}{2a} t \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date se scrie atunci

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at + \frac{1}{4a^2} \cos at + \frac{1}{2a} t \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

cu C_1, C_2 constante arbitrare. Soluţia problemei lui Cauchy cu condiţiile iniţiale $x\left(\dfrac{\pi}{a}\right) = 0$, $x'\left(\dfrac{\pi}{a}\right) = -\dfrac{\pi}{2a}$, cum $C_1 = -\dfrac{1}{4a^2}$, $C_2 = 0$, este $x(t) = \dfrac{t}{2a} \sin at$.

13.28 *Să se integreze următoarele ecuaţii ştiind că ecuaţiile omogene corespunzătoare admit soluţiile indicate:*

1) $(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = (2t+1)^2, \quad x^1 = t, \quad x^2 = e^{-2t}.$
2) $(t^2+1)x'' - 2tx' + 2x = 2(t^2+1)e^t, \quad x^1 = t, \quad x^2 = t^2 - 1.$
3) $tx''' = x'' - tx' + x = -t^2, \quad x^1 = t, \quad x^2 = e^t, \quad x^3 = e^{-t}.$

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 t + C_2 e^{-2t} + t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}.$
2) $x(t) = C_1 t + C_2 \left(t^2 - 1\right) + (t-1)^2 e^t.$
3) $x(t) = C_1 t + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + t^2 + 2.$

13.29 *Să se integreze ecuaţia* $x'' + \dfrac{2}{t}x' + x = 0$, *dacă* $x_1(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ *este o soluţie particulară.*

R: Se face schimbarea de variabilă dependentă $x = x_1 y$. Se obţine:
$x(t) = \dfrac{1}{t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t).$

13.30 *Să se integreze ecuaţia* $t^2(\ln t - 1)x'' - tx' + x = 0$, *dacă* $x_1(t) = t$ *este o soluţie particulară.*

R: $x(t) = C_1 t - C_2 \ln t.$

13.4 Ecuaţii de ordinul n cu coeficienţi constanţi

13.31 *Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi:*

1) $x'' - 5x' + 6x = 0.$ 2) $x'' - 9x = 0.$ 3) $x'' - x' = 0.$
4) $x'' + x = 0.$ 5) $x'' - 2x' + 2x = 0.$ 6) $x'' + 4x' + 13x = 0.$

R: 1) Ecuaţia caracteristică $r^2 - 5r + 6 = 0$, are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Soluţia generală este $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$. 2) $x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$. 3) $x(t) = C_1 + C_2 e^t$.
4) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. 5) $x(t) = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. 6) $x(t) = e^{-2t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$.

13.32 *Să se integreze ecuaţia* $x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi + \dfrac{\pi}{2}\}$.

R: Ecuaţia omogenă $x'' + x = 0$ are ecuaţia caracteristică $r^2 + 1 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este deci

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă sub forma

$$x^*(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t,$$

cu $u_1' \cos t + u_2' \sin t = 0$, $-u_1' \sin t + u_2' \cos t = \dfrac{1}{\cos t}$, de unde $u_1' = -\operatorname{tg} t$, $u_2' = 1$ şi deci

$$u_1(t) = \ln|\cos t|, \quad u_2(t) = t,$$

încât, soluţia generală a ecuaţiei neomogene va fi

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t| + t \sin t.$$

13.33 *Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordinul al doilea, neomogene:*

1) $2x'' - x' - x = 4te^{2t}$. 2) $x'' - 2x' + x = te^t$. 3) $x'' + x = t \sin t$.
4) $x'' + x = t^2 + t$. 5) $x'' + x' = t - 2$. 6) $x'' - x = te^{2t}$.
7) $x'' - 7x' + 6x = \sin t$. 8) $x'' + 4x = t \sin 2t$. 9) $x'' + 3x' + 2x = t \sin t$.

R: 1) Se caută o soluţie particulară de forma: $x^*(t) = e^{2t}(At + B)$. Se obţine
$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-\frac{t}{2}} + e^{2t}\left(\dfrac{4}{5}t - \dfrac{28}{25}\right)$.
2) Se caută o soluţie particulară de forma: $x^*(t) = t^2 e^t (At + B)$. Se obţine
$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^t + \dfrac{1}{6} t^3 e^t$.
3) Se caută o soluţie particulară de forma: $x^*(t) = t[(At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t]$. Se obţine
$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \dfrac{t^2}{4} \cos t + \dfrac{t}{4} \sin t$.
4) $x\,(t) = -2 + t + t^2 + C_1 \cos t + C_2 \sin t$.
5) $x\,(t) = C_1 + C_2 e^{-t} - 3t + \dfrac{1}{2} t^2$.
6) $x\,(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \dfrac{1}{3}\left(t - \dfrac{4}{3}\right) e^{2t}$.
7) $x\,(t) = C_1 e^t + C_2 e^{6t} + \dfrac{7}{74} \cos t + \dfrac{5}{74} \sin t$.
8) $x\,(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \dfrac{1}{8} t^2 \cos 2t + \dfrac{1}{16} t \sin 2t + \dfrac{1}{64} \cos 2t$.
9) $x\,(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + \left(-\dfrac{3}{10} t + \dfrac{17}{50}\right) \cos t + \left(\dfrac{1}{10} t + \dfrac{3}{25}\right) \sin t$.

13.34 *Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordinul al doilea, neomogene:*

1) $x'' + x' = 4t^2 e^t$. 2) $x'' + 10x' + 25x = 4e^{-5t}$.
3) $x'' - 6x' + 9x = 25e^t \sin t$. 4) $x'' + 2x' + 5x = e^{-t} \cos 2t$.

R: Avem:
1) $x\,(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + \left(2t^2 - 6t + 7\right) e^t$.
2) $x\,(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-5t} + 2t^2 e^{-5t}$.
3) $x\,(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} t + (4 \cos t + 3 \sin t)\, e^t$.
4) $x\,(t) = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t + \dfrac{1}{4} t e^{-t} \sin 2t$.

13.35 *Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordin mai mare decât doi:*

1) $x''' - 13x'' + 12x' = 0$	2) $x''' + x = 0.$	3) $x^{(4)}2x'' = 0.$
4) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0.$	5) $x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0.$	6) $x^{(4)} - 2x'' + x = 0.$
7) $x''' - 2x'' - 3x' = 0.$	8) $x''' + 2x'' + x' = 0.$	9) $x''' + 4x'' + 13x' = 0.$

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 + C_2e^t + C_3e^{12t}$.
2) $x(t) = C_1e^{-t} + e^{\frac{t}{2}}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.
3) $x(t) = C_1 + C_2t + C_3e^{t\sqrt{2}} + C_4e^{-t\sqrt{2}}$.
4) $x(t) = e^t\left(C_1 + C_2t + C_3t^2\right)$.
5) $x(t) = (C_1 + C_2t) \cos 2t + (C_3 + C_4t) \sin 2t$.
6) $x(t) = (C_1 + C_2t)\, e^{-t} + (C_3 + C_4t)\, e^t$.
7) $x\,(t) = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{3t}$.
8) $x\,(t) = C_1 + (C_2 + C_3t)\, e^{-t}$.
9) $x\,(t) = C_1 + (C_2 \cos 3t + C_3 \sin 3t)\, e^{-2t}$.

13.36 *Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:*

1) $x'' + 4x' + 5x = 0.$	2) $x^{(5)} - 2x^{(4)} + 2x''' - 4x'' + x' - 2x = 0.$
3) $x^{(4)} + 4x''' + 8x'' + 8x' + 4x = 0.$	4) $x^{(4)} - 4x''' + 5x'' - 4x' + 4x = 0.$

R: Avem:
1) $x\,(t) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)\, e^{-2t}$.
2) $x\,(t) = (C_1 + C_2t) \cos t + (C_3 + C_4t) \sin t + C_5e^{2t}$.
3) $x\,(t) = [(C_1 + C_2t) \cos t + (C_3 + C_4t) \sin t]\, e^{-t}$.
4) $x\,(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (C_3 + C_4t)\, e^{2t}$.

13.37 *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$x^{(4)} + 2x''' + 5x'' + 8x' + 4x = 40e^{-t} + \cos t.$$

R: Ecuaţia caracteristică $r^4 + 2r^3 + 5r^2 + 8r + 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -1$ şi $r_3 = 2i$, $r_4 = -2i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene se scrie

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $r = -1$ este rădăcină dublă pentru ecuaţia caracteristică, vom căuta o soluţie particulară de forma

$$x^*(t) = At^2e^{-t} + B \cos t + C \sin t.$$

Introducând în ecuaţie şi identificând coeficienţii, se găseşte $A = 4$, $B = 0$, $C = \dfrac{1}{6}$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene va fi

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t + 4t^2e^{-t} + \frac{1}{6} \sin t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

13.38 *Să se găsească soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordin mai mare decât doi, neomogene:*

1) $x^{(4)} - 2x''' + x'' = e^t$. 2) $x^{(4)} - 2x''' + x'' = t^3$.
3) $x''' - x'' + x' - x = t^2 + t$. 4) $x''' - x'' = 12t^2 + 6t$.

R: 1) Se caută $x^*(t) = At^2e^t$. Rezultă $x(t) = C_1 + C_2 t + \left(C_3 + C_4 t + \dfrac{t^2}{2}\right) e^t$.
2) Se caută $x^*(t) = t^2\left(A + Bt + Ct^2 + Dt^3\right)$. Rezultă
$x(t) = (C_1 + C_2 t) + (C_3 + C_4 t)\, e^t + 12t^2 + 3t^3 + \dfrac{1}{2}t^4 + \dfrac{1}{20}t^5$.
3) $x\,(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t - 1 - 3t - t^2$.
4) $x\,(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^t - 15t^2 - 5t^3 - t^4$.

13.39 *Să se găsească soluţia particulară a ecuaţiei:*

$$x''' + 2x'' + 2x' + x = t,$$

care verifică condiţiile iniţiale: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$.

R: $x(t) = e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + t - 2$.

13.5 Ecuaţia lui Euler

13.40 *Să se integreze ecuaţiile Euler:*

1) $t^2x'' + tx' + x = 1$. 2) $t^2x'' + 3tx' + x = 0$.
3) $t^2x'' - 4tx' + 6x = t$. 4) $t^2x'' + 2tx' - 6x = 0$.
5) $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^2 - 2t + 2$. 6) $t^2x'' - tx' - 3x = t$.

R: Avem:
1) $x(t) = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t) + 1$.
2) $x(t) = (C_1 + C_2 \ln t)\, \dfrac{1}{t}$.
3) $x(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + \dfrac{1}{2}t$.
4) $x\,(t) = C_1 t^2 + C_2 \dfrac{1}{t^3}$.
5) $x\,(t) = C_1 t + C_2 t^2 - t^2 + 2t \ln t + 1 + t^2 \ln t + 2t$.
6) $x\,(t) = C_1 \dfrac{1}{t} + C_2 t^3 - \dfrac{1}{4}t$.

13.41 *Să se integreze ecuaţiile Euler:*

1) $(t-2)^2\, x'' - 3\,(t-2)\, x' + 4x = t - 2$.
2) $t^3x''' - t^2x'' + 2tx' - 2x = t^3 + 2t$.
3) $(4t-1)^2\, x'' - 2\,(4t-1)\, x' + 8x = 0$.
4) $(t+1)^3\, x'' + 3\,(t+1)^2\, x' + (t+1)\, x = 6 \ln(t+1)$.

R: Avem:
1) $x(t) = t - 2 + [C_1 + C_2 \ln(t-2)](t-2)^2$.
2) $x(t) = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t \ln t + \frac{1}{4} t^3 - t\left(\ln^2 t + 2\ln t + 2\right)$.
3) $x(t) = C_1 \sqrt{(4t-1)} + C_2 (4t-1)$.
4) $x(t) = \frac{C_1}{t+1} + \frac{C_2}{t+1} \ln(t+1) + \frac{1}{t+1} \ln^3 (t+1)$.

13.42 *Să se găsească soluţia particulară a ecuaţiei:*

$$t^2 x'' = tx' + x = 2t,$$

care verifică condiţiile iniţiale: $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$.

R: $x(t) = t\left(\ln t + \ln^2 t\right)$.

Bibliografie

[1] Lia Aramă, T. Morozanu, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol. I*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[2] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[3] G. N. Berman, *A Problem Book in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow,1980.

[4] Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol. II şi III*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[5] N. Calistru, Gh. Ciobanu, *Curs de analiză matematică*, Rotaprint IPI, 1988.

[6] G. Chilov, *Analyse mathématique*, Éditions Mir, Moscou, 1984.

[7] S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1989.

[8] A. Corduneanu, *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică*, Editura FACLA, Timişoara, 1981.

[9] A. Corduneanu, A. L. Pletea, *Noţiuni de teoria ecuaţiilor diferenţiale*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 1999.

[10] B. Demidovich, *Problems in mathematical analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1981.

[11] N. Donciu, D. Flondor, *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Editura ALL, Bucureşti, 1993.

[12] N. Gheorghiu, T. Precupanu, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.

[13] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko, E. Shihin, *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol. I and II, Mir Publishers, Mosvow, 1990.

[14] V. A. Kudryavtsev and B. P. Demidovich, *A Brief Course of Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[15] Gh. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[16] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, Bucureşti, 1984.

[17] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, A*naliză matematică*, Vol. I, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.

[18] Gh. Procopiuc, *Matematică*, Tipografia Univ. Tehnice "Gh. Asachi" Iaşi, 1999.

[19] Gh. Procopiuc, Gh. Slabu, M. Ispas, *Matematică, teorie şi aplicaţii*, Editura "Gh. Asachi" Iaşi, 2001.

[20] Gh. Procopiuc, N. Ionescu, *Algebră liniară şi geometrie*, Editura Tehnica-Info, Chişinău, 2002.

[21] Gh. Procopiuc N. Ionescu, *Probleme de algebră liniară şi geometrie*, Editura Tehnica-Info, Chişinău, 2002.

[22] Gh. Procopiuc, *Analiză matematică*, http://ontario.tcm.tuiasi.ro/˜tcm1, 2002.

[23] M. Roşculeţ, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1984.

[24] Ioan A. Rus, Paraschiva Pavel, Gh. Micula, B. B. Ionescu, *Probleme de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.

[25] A. A. Shestakov, *A Course of Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moskow, 1990.

[26] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral, Vol. 1, Noţiuni fundamentale*, Ed. şt. şi Encicl., Bucureşti, 1985.

[27] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral, Vol. 2, Exerciţii*, Ed. Şt. şi Encicl., Bucureşti, 1985.

[28] Rodica Tudorache, *Culegere de probleme de analiză matematică, Vol. I, Calculul diferenţial*, Univ. Th. Gh. Asachi Iaşi, 2000.

[29] Rodica Tudorache, *Culegere de probleme de analiză matematică, Vol. II, Calculul integral*, Univ. Th. Gh. Asachi Iaşi, 2001.