Subiectul I (2 puncte)

a) Fie $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial $(\mathbb{V},\mathbb{K})$. Să se arate că vectorii:

$f_1 = 5e_1 + e_3,\ f_2 = 3e_2 - 2e_3,\ f_3 = e_1 + e_2$ sunt liniar independenţi.

b) Să se stabilească dacă mulţimea $X = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 = x_2 = x_4\right\}$ constituie sau nu subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^4$. În caz afirmativ, să se determine o bază şi dimensiunea subspaţiului $(X,\mathbb{R})$.

Subiectul II (2 puncte)

Se consideră funcţionala pătratică definită pe $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$

$V(x) = f(x,x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.

a) Scrieţi matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice)

b) Determinaţi funcţionala polară a funcţionalei pătratice.

c) Determinaţi o formă canonică a funcţionalei pătratice (prin metoda lui Gauss sau prin metoda lui Iacobi).

d) Determinaţi baza corespunzătoare formei canonice.

Subiectul III (2 puncte)

În spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$ se consideră X mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor

$v_1 = (-1,1,1)^T$, $v_2 = (-1,2,3)^T$ şi $v_3 = (1,1,3)^T$.

a) Să se determine câte o bază ortonormată pentru subspaţiile vectoriale X şi respectiv $X^\perp$.

b) Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului $x = (2,3,4)^T$ pe X.

Subiectul IV (6 0,5 = 3 puncte)

1-a) Fie (X,K) şi (Y,K) subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial (V,K). Definiţi suma directă a subspaţiilor (X,K) şi (Y,K) (notată $(X \oplus Y, K)$).

1-b) Arătaţi că $(X \oplus Y, K)$ este subspaţiu vectorial al lui (V,K).

2-a) Definiţi rangul operatorului liniar $U \in L(X,Y)$.

2-b) Determinaţi soluţia ecuaţiei diferenţiale $y' = y - x$ care verifică $y(0) = 2$.

3-a) Se consideră un spaţiu euclidian X şi un operator liniar $U \in L(X,X)$. Scrieţi definiţia operatorului autoadjunct U.

3-b) Determinaţi valorile proprii şi vectorii proprii ai operatorului liniar autoadjunct $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $U(x) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2)^T$, $\forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.