Aceasta este o listă de posibile tipuri de subiecte pentru examen, împreună cu punctaje şi indicaţii de rezolvare. Pentru o rezolvare completă trebuie adăugate explicaţii acolo unde este cazul.

1. [0,5p.] Pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n - 3^n}{5^{n+1}}$, să se calculeze suma seriei.

   Soluţie:

   Se ştie: $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in (-1, 1)$.

   Se obţine:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n - 3^n}{5^{n+1}} = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} - \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} =$$

   $$= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \frac{1}{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{8}{5} - \frac{3}{10} = \frac{13}{10}.$$

2. [0,5p] Pentru seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}$, să se afle domeniul de convergenţă.

   Soluţie:

   $$x_0 = 1,\ a_n = \frac{1}{n+1},\ \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \omega = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\omega} = 1;$$

   domeniul de convergenţă D include intervalul $(x_0 - R, x_0 + R) = (1-1, 1+1) = (0, 2)$.

   Pentru a preciza exact domeniul, trebuie studiate capetele $x = 0$ şi $x = 2$.

   Pentru $x = 0$, seria devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0-1)^n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, care este convergentă (seria armonică alternată; se aplică criteriul Leibniz pentru serii alternate şi se constată că şirul $a_n = \frac{1}{n+1}$ este descrescător la 0, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, iar $a_{n+1} < a_n \iff \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \iff n+2 > n+1 \iff 2 > 1$)

   Pentru $x = 2$, seria devine: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2-1)^n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, care este divergentă (seria armonică).

   Cu cele de mai sus, se obţine răspunsul final: domeniul de existenţă al seriei de puteri studiate este $D = (0, 2) \cup \{0\} = [0, 2)$.

3. [1p] Să se dezvolte funcţia $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ în serie Taylor în jurul punctului $a = 1$ şi să se stabilească domeniul de convergenţă.

   Soluţie:

   Se foloseşte formula $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in (-1, 1)$.

   Se descompune expresia iniţială în fracţii simple:

   $$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

   Fiecare fracţie simplă este dezvoltată în serie Taylor în jurul lui $a = 1$:

   - $$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1 + (x-1) + 1} = \frac{1}{2 + (x-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-1}{2}\right)}$$

     Se aplică formula iniţială pentru $x \mapsto \left(-\frac{x-1}{2}\right)$:

     $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n$, pentru $\left(-\frac{x-1}{2}\right) \in (-1, 1) \iff x - 1 \in (-2, 2) \iff x \in (-1, 3)$.

     Se obţine: $\frac{1}{x+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n$, $\forall x \in (-1, 3)$.

- $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{3}\right)}$

  Se aplică formula iniţială pentru $x \mapsto \left(-\frac{x-1}{3}\right)$:

  $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n$, pentru $\left(-\frac{x-1}{3}\right) \in (-1,1) \iff x-1 \in (-3,3) \iff x \in (-2,4)$.

  Se obţine: $\frac{1}{x+2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n,\ \forall x \in (-2,4)$.

Din cele de mai sus, pentru $x \in (-1,3) \cap (-2,4) = (-1,3)$ are loc:

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$.

În final se obţine următoarea concluzie:

$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n,\ \forall x \in (-1,3)$ [dezvoltare în serie în jurul punctului 1 a funcţiei date]

4. [1p] Determinaţi punctele de extrem local condiţionat ale funcţiei $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$, cu legătura $2x + y = 6$.

   Soluţie:

   - Se consideră funcţia Lagrange ataşată problemei: $L(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 - 2 + \lambda(2x + y - 6)$
   - Se calculează derivatele parţiale în x şi în y:

     $L'_x(x,y;\lambda) = 2x + 2\lambda$

     $L'_y(x,y;\lambda) = 2y + \lambda$
   - Se rezolvă sistemul:

     $$\begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ -2\lambda - \frac{\lambda}{2} = 6 \Rightarrow -\frac{5\lambda}{2} = 6 \Rightarrow \hat{\lambda} = -\frac{12}{5} \Rightarrow \hat{x} = \frac{12}{5} \Rightarrow \hat{y} = \frac{6}{5} \end{cases}$$
   - Se calculează diferenţiala de ordin 2 a funcţiei $(x,y) \mapsto L\left(x,y;-\frac{12}{5}\right)$:

     $L'_x\left(x,y;-\frac{12}{5}\right) = 2x - \frac{24}{5} \Rightarrow L''_{x^2}\left(x,y;-\frac{12}{5}\right) = 2,\ L''_{xy}\left(x,y;-\frac{12}{5}\right) = 0$

     $L'_y\left(x,y;-\frac{12}{5}\right) = 2y - \frac{12}{5} \Rightarrow L''_{y^2}\left(x,y;-\frac{12}{5}\right) = 2$

     $\Rightarrow L''_{x^2}\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right) = 2,\ L''_{xy}\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right) = 0,\ L''_{y^2}\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right) = 2$

     $\Rightarrow d^2L\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2$
   - Se diferenţiază legătura:

     $2x + y = 6 \Rightarrow 2dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -2dx$
   - Se calculează diferenţiala de ordin 2 a funcţiei $(x,y) \mapsto L\left(x,y;-\frac{12}{5}\right)$ restricţionată la diferenţiala legăturii, în punctul $\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5}\right)$:

     $d^2L\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right)\Big|_{dy=-2dx} = \left[2(dx)^2 + 2(dy)^2\right]_{dy=-2dx} = 2(dx)^2 + 2(-2dx)^2 = 10(dx)^2$
   - Se stabileşte natura funcţionalei pătratice $d^2L\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right)\Big|_{dy=-2dx}$:

     $10(dx)^2$ este o funcţională pătratică strict pozitiv definită

- Se obţine concluzia:
  Deoarece $d^2L\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5};-\frac{12}{5}\right)\Big|_{dy=-2dx}$ este strict pozitiv definită, punctul $\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5}\right)$ este un punct de minim condiţionat.

5. [1p.] Un produs a avut următoarele vânzări:

	Nov.	Dec.	Ian.	Feb.	Mar.
x_i (luna)	-2	-1	0	1	2
y_i (vânzarea)	1	2	5	8	9

.

Folosind metoda celor mai mici pătrate, să se afle eroarea de aproximare a modelului şi să se estimeze vânzarea pentru luna Aprilie.

[Notă] Formulele sunt:

$$\hat{a}=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\ \hat{b}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\right)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\ E(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2.$$

Soluţie:

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	$\left(\frac{22}{10}x_i+5-y_i\right)^2$
1.	-2	1	4	-2	$\left(\frac{22}{10}(-2)+5-1\right)^2=\frac{4}{25}$
2.	-1	2	1	-2	$\left(\frac{22}{10}(-1)+5-2\right)^2=\frac{16}{25}$
3.	0	5	0	0	$\left(\frac{22}{10}\cdot 0+5-5\right)^2=0$
4.	1	8	1	8	$\left(\frac{22}{10}\cdot 1+5-8\right)^2=\frac{16}{25}$
5.	2	9	4	18	$\left(\frac{22}{10}\cdot 2+5-9\right)^2=\frac{4}{25}$
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	0	25	10	22	$\frac{8}{5}$

$\hat{a}=\dfrac{5\cdot 22-0\cdot 25}{5\cdot 10-0^2}=\dfrac{22}{10}$,

$\hat{b}=\dfrac{10\cdot 25-0\cdot 22}{5\cdot 10-0^2}=5$,

$y=\hat{a}x+\hat{b}\Rightarrow\boxed{y=\frac{22}{10}x+5}$ este dreapta cea mai apropiată de date cu metoda celor mai mici pătrate.

Eroarea cu metoda celor mai mici pătrate a modelului faţă de date este $E(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2\Rightarrow E\left(\hat{a},\hat{b}\right)=\dfrac{8}{5}$.

Luna aprilie corespunde valorii $x_6=3\Rightarrow$ estimarea folosind modelul pentru vânzarea pe luna aprilie este $y_6=\dfrac{22}{10}\cdot 3+5=\dfrac{58}{5}=11,6$.

6. [0,5p] Să se calculeze integrala: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$.

Soluţie:

$\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x+\mathcal{C}$ [formulă directă de integrare – clasa a XII–a]

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$.

$\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{x=-\infty}^{x=0}=\arctan 0-\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

$\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}\ \arctan x\Big|_{x=0}^{x=\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x-\arctan 0=\dfrac{\pi}{2}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$.

7. [0,5p.] Să se calculeze integrala: $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$.

Soluţie:

Se face schimbarea de variabilă $y = x^2$, $x \in [0, \infty) \Rightarrow \sqrt{y} = x \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$, $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x \to \infty \Rightarrow y \to \infty \end{cases}$

$\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx = \int\limits_0^\infty \sqrt{y}e^{-y}\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-y}dy = \frac{1}{2}\left(-\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y} + e^{-0}\right) = \frac{1}{2}$.

8. [1p] Fie A şi B două evenimente cu $P(A) = \frac{4}{10}$ şi $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$.

   a) Dacă A şi B sunt evenimente independente, să se afle $P(B)$.

   b) Dacă A şi B sunt incompatibile, să se afle $P(B)$.

   Soluţie:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

   a) A şi B independente $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; $\Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{4}{10} + P(B) - \frac{4}{10} \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{2}$.

   b) Dacă A şi B sunt incompatibile $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{4}{10} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10}$.

9. [1p] Se consideră 10 piese dintre care 7 sunt corespunzătoare şi 3 necorespunzătoare. Se verifică 3 piese, fără a pune înapoi piesele controlate. Să se afle probabilitatea ca:

   a) toate pisele verificate sunt corespunzătoare.

   b) prima şi a treia piesă să fie necorespunzătoare iar a doua corespunzătoare.

   Soluţie:

   Se notează cu A_i evenimentul că la verificarea i piesa este corespunzătoare.

   a) Fie A evenimentul că toate pisele verificate sunt corespunzătoare; $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

   $P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cap A_2)) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}$.

   b) Fie B evenimentul că prima şi a treia piesă sunt necorespunzătoare iar a doua corespunzătoare; $B = \bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$.

   $P(B) = P\left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) = P\left(\bar{A}_1\right) \cdot P\left(A_2|\bar{A}_1\right) \cdot P\left(\bar{A}_3|\left(\bar{A}_1 \cap A_2\right)\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{40}$

10. [2p] Se consideră funcţia $f(x) = \begin{cases} ax(2-x), & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$.

    a) Să se afle constanta a astfel încât $f(\cdot)$ să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare X.

    b) Să se afle funcţia de repartiţie a lui X.

    c) Să se calculeze media şi dispersia lui X.

    d) Să se afle $P\left(X < \frac{3}{2}|X > \frac{1}{2}\right)$.

    Soluţie:

    a) Pentru ca funcţia să fie densitate de probabilitate, trebuie satisfăcute două condiţii:

    $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$

    $1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx + \int\limits_{2}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} ax(2-x)\,dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0dx = a\left[2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = a\left[4 - \frac{8}{3}\right] = a\frac{4}{3} \Rightarrow$

    $\Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x), & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$.

    b) Funcţia de repartiţie este:

    $F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2(3-x), & 0 < x \leq 2 \\ 1, & 2 < x \end{cases}$.

    Pentru situaţia $0 < x \leq 2$, $P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{0}^{x} \frac{3}{4}t(2-t)\,dt = \frac{1}{4}x^2(3-x)$.

c) Media: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\frac{3}{4}\int\limits_0^2 x^2(2-x)\,dx=1.$

Momentul iniţial de ordin 2: $M_2(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx=\frac{3}{4}\int\limits_0^2 x^3(2-x)\,dx=\frac{6}{5}.$

Dispersia: $D(X)=M_2(X)-M^2(X)=\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5}.$

d) $P\left(X<\frac{3}{2}|X>\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(\left(X<\frac{3}{2}\right)\cap\left(X>\frac{1}{2}\right)\right)}{P\left(X>\frac{1}{2}\right)}=\frac{P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)}{P\left(X>\frac{1}{2}\right)}=\frac{F_X\left(\frac{3}{2}\right)-F_X\left(\frac{1}{2}\right)}{1-F_X\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{27}{32}-\frac{5}{32}}{1-\frac{5}{32}}=\frac{22}{27}.$

$F_X\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(3-\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{32};\ F_X\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{32}$

11. [2p] Într–o cutie sunt 5 piese de acelaşi tip, dintre care 4 sunt funcţionale iar una nefuncţională. Se extrag două piese şi se notează cu X, respectiv Y variabilele aleatoare care indică numărul pieselor defecte la prima, respectiv a doua extragere. Se cere:

a) Să se afle repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale (X,Y).

b) Să se afle variabilele aleatoare marginale X şi Y.

c) Să se decidă dacă variabilele aleatoare marginale sunt independente.

d) Să se calculeze coeficientul de corelaţie dintre variabilele aleatoare marginale.

Soluţie:

a) Repartiţia lui (X,Y) este:

$X\backslash Y$	0	1	p_i
0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
q_j	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

b) $X:\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix},\ Y:\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

c) $\left.\begin{array}{r} P((X=0)\cap(Y=0))=\frac{3}{5}\\ P(X=0)=\frac{4}{5}\\ P(Y=0)=\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\neq\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{25}\end{array}\right\}\Rightarrow$ variabilele aleatoare X şi Y nu sunt independente.

d) $\rho(X,Y)=\frac{M(XY)-M(X)M(Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$M(XY)=0\cdot 0\cdot\frac{3}{5}+0\cdot 1\cdot\frac{1}{5}+1\cdot 0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot 1\cdot 0=0$

$M(X)=0\cdot\frac{4}{5}+1\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5};\ M(Y)=0\cdot\frac{4}{5}+1\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

$M_2(X)=0^2\cdot\frac{4}{5}+1^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5};\ M_2(Y)=0^2\cdot\frac{4}{5}+1^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

$D(X)=M_2(X)-M^2(X)=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{4}{25}\Rightarrow\sigma_X=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$

$D(Y)=M_2(Y)-M^2(Y)=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{4}{25}\Rightarrow\sigma_Y=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$

$\Rightarrow\rho(X,Y)=\frac{0-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}=-\frac{1}{4}.$