Examen la Matematici Aplicate în Economie, CIG–ID, semestrul I, 03.02.2014, sala 2102, ora 18,00

1. [2,5p] Serii

a) [0,5p] Pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\cdot4^n-4\cdot3^n}{5^{n+1}}\right)^2$, să se calculeze suma seriei.

Sol: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\cdot4^n-4\cdot3^n}{5^{n+1}}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{25}\frac{3^{2n}}{5^{2n}}+\frac{9}{25}\frac{4^{2n}}{5^{2n}}-\frac{24}{25}\frac{3^n4^n}{5^{2n}}\right)=$

$=\frac{16}{25}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^n+\frac{9}{25}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{25}\right)^n-\frac{24}{25}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{25}\right)^n=$

$=\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{25}}+\frac{9}{25}\cdot\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{1-\frac{16}{25}}-\frac{24}{25}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{1-\frac{12}{25}}=$

$=\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{25}{16}+\frac{9}{25}\cdot\frac{16}{25}\cdot\frac{25}{9}-\frac{24}{25}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{25}{13}=$

$=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}-\frac{24\cdot12}{25\cdot13}=\frac{37}{325}$

b) Pentru seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n+3}$, să se afle:

b1) [0,5p] raza de convergenţă;

Sol: $\omega=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+5}}{\frac{1}{2n+3}}=1\Rightarrow R=\frac{1}{\omega}=1.$

b2) [0,5p] intervalul de convergenţă.

Sol: $|x-2|<1 \iff -1<x-2<1 \iff x\in(1,3).$

Studiul capetelor:

$x=1\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2)^n}{2n+3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$ serie convergentă (Criteriul Leibnitz)

$x=3\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2)^n}{2n+3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ serie divergentă (serie comparabilă cu seria armonică)

$\Rightarrow$ domeniul de convergenţă este $D=[1,3)$.

c)[1p] Să se dezvolte funcţia $f(x)=\frac{1}{(x+2)(x+4)}$ în serie Taylor în jurul punctului $a=3$ şi să se stabilească domeniul de convergenţă.

Sol:

$\frac{1}{(x+2)(x+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$

$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-3+5}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{5}\right)}=\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{5}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(x-3)^n$, pentru $\left(-\frac{x-3}{5}\right)\in(-1,1)\iff x\in(-2,8)$.

$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x-3+7}=\frac{1}{7}\frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{7}\right)}=\frac{1}{7}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{7}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}(x-3)^n$, pentru $\left(-\frac{x-3}{7}\right)\in(-1,1)\iff x\in(-4,10)$.

$\Rightarrow f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2\cdot5^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{2\cdot7^{n+1}}\right](x-3)^n,\ x\in(-2,8)\cap(-4,10)=(-2,8).$

2. [1p] Determinaţi punctele de extrem local condiţionat ale funcţiei $f(x,y)=3x^2+4y^2-5$, cu legătura $3x+2y=4$.

Sol:

$L(x,y;\lambda)=3x^2+4y^2-5+\lambda(3x+2y-4)$

$$\left.\begin{array}{l}L'_x(x,y;\lambda)=6x+3\lambda\\ L'_y(x,y;\lambda)=8y+2\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}6x+3\lambda=0\\ 8y+2\lambda=0\\ 3x+2y=4\end{array}\right.\Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(1, \frac{1}{2}; -2\right)$

$d^2L\left(1, \frac{1}{2}; -2\right) = 6\,(dx)^2 + 8\,(dy)^2$

$3x + 2y = 4 \Rightarrow 3dx + 2dy = 0$

$d^2L\left(1, \frac{1}{2}; -2\right)\Big|_{dy=-\frac{3}{2}dx} = \left[6\,(dx)^2 + 8\,(dy)^2\right]_{dy=-\frac{3}{2}dx} = 2\,(dx)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}dx\right)^2 = \frac{13}{2}\,(dx)^2$

Deoarece $d^2L\left(1, \frac{1}{2}; -2\right)\Big|_{dy=-\frac{3}{2}dx}$ este strict pozitiv definită, punctul $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ este un punct de minim condiţionat.

3. [2p] Un produs a avut următoarele vânzări:

	Nov.	Dec.	Ian.	Feb.	Mar.
x_i (luna)	0	1	2	3	4
y_i (vânzarea)	1	2	4	7	10

.

Folosind metoda celor mai mici pătrate, să se afle:

a) [1p] cea mai bună aproximare liniară;

b) [0,5p] eroarea de aproximare a modelului;

c) [0,5p] estimarea de vânzare pentru luna Aprilie.

Notă: Se acordă suplimentar 1p pentru deducerea formulelor.

Sol:

a)

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1.	0	1	0	0
2.	1	2	1	2
3.	2	4	4	8
4.	3	7	9	21
5.	4	10	16	40
$\sum_{i=1}^{n}$	10	24	30	71

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{5\cdot 71 - 10\cdot 24}{5\cdot 30 - 100} = \frac{23}{10}$$

$$\hat{b} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{30\cdot 24 - 10\cdot 71}{5\cdot 30 - 100} = \frac{1}{5}$$

$y = \frac{23}{10}x + \frac{1}{5}$

b)

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	$\left(\frac{23}{10}x_i + \frac{1}{5} - y_i\right)^2$
1.	0	1	0	0	$\left(\frac{23}{10}\cdot 0 + \frac{1}{5} - 1\right)^2 = \frac{16}{25}$
2.	1	2	1	2	$\left(\frac{23}{10}(1) + \frac{1}{5} - 2\right)^2 = \frac{1}{4}$
3.	2	4	4	8	$\left(\frac{23}{10}\cdot 2 + \frac{1}{5} - 4\right)^2 = \frac{16}{25}$
4.	3	7	9	21	$\left(\frac{23}{10}\cdot 3 + \frac{1}{5} - 7\right)^2 = \frac{1}{100}$
5.	4	10	16	40	$\left(\frac{23}{10}\cdot 4 + \frac{1}{5} - 10\right)^2 = \frac{9}{25}$
$\sum_{i=1}^{n}$	10	24	30	71	$\frac{19}{10}$

c) $x = 5 \Rightarrow \frac{23}{10}\cdot 5 + \frac{1}{5} = \frac{117}{10}.$

4. [1p]Integrale

a) [0,5p] Folosind eventual integrala Beta, să se calculeze integrala: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

Sol:
$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$.

b)[0,5p] Folosind eventual integrala Gamma, să se calculeze integrala: $\int_{-1}^{\infty} \sqrt{x+1} e^{-x-1} dx$.

Sol:
$\int\limits_{-1}^{\infty} \sqrt{x+1} e^{-x-1} dx = \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. [1p] Fie A şi B două evenimente cu $P(A) = \frac{2}{5}$ şi $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

a) [0,5p] Dacă A şi B sunt evenimente independente, să se afle $P(B)$.

Sol: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

A şi B independente $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{2}{5} P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{9}$.

b) [0,5p] Dacă A şi B sunt incompatibile, să se afle $P(B)$.

Sol: A şi B sunt incompatibile $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

6. [1p] Se consideră 20 piese dintre care 10 sunt corespunzătoare şi 10 necorespunzătoare. Se verifică 3 piese, fără a pune înapoi piesele controlate. Să se afle probabilitatea ca:

a) [0,5p] toate piesele verificate sunt corespunzătoare.

Sol:

$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|(A_1 \cap A_2)) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{2}{19}$.

b) [0,5p] prima şi a doua piesă să fie corespunzătoare, iar a treia necorespunzătoare.

Sol:

$P(B) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P\left(\bar{A}_3|(A_1 \cap A_2)\right) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{5}{38}$.

7. [2p] Se consideră funcţia $f(x) = \begin{cases} ax(3-x), & x \in [0,3] \\ 0, & x \notin [0,3] \end{cases}$.

a) [0,5p] Să se afle constanta a astfel încât $f(\cdot)$ să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare X.

Sol:

$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_0^3 f(x)\, dx + \int\limits_3^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_0^3 ax(3-x)\, dx = \frac{9}{2} a$

$\Rightarrow a = \frac{2}{9}$.

b) [0,5p] Să se afle funcţia de repartiţie a lui X.

Sol:

$$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{27} x^2 (9-2x), & 0 < x \le 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

c) [0,5p] Să se calculeze media şi dispersia lui X.

Sol:

$M(X) = \frac{2}{9} \int\limits_0^3 x^2 (3-x)\, dx = \frac{3}{2}$.

$M_2(X) = \frac{2}{9}\int\limits_0^3 x^3(3-x)\,dx = \frac{27}{10}.$

$D(X) = M_2(X) - M^2(X) = \frac{27}{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{20}.$

d) [0,5p] Să se afle $P(X < 2|\, X > 1)$.

Sol:

$$P(X < 2|X > 1) = \frac{P((X<2)\cap(X>1))}{P(X>1)} = \frac{P(1<X<2)}{P(X>1)} = \frac{\frac{13}{27}}{\frac{20}{27}} = \frac{13}{20}$$

8. [2p] Într–o cutie sunt 10 piese de acelaşi tip, dintre care 9 sunt funcţionale iar una nefuncţională. Se extrag două piese şi se notează cu X, respectiv Y variabilele aleatoare care indică numărul pieselor defecte la prima, respectiv a doua extragere. Se cere:

a) [0,5p] Să se afle repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale (X, Y).

Sol:

$X\backslash Y$	0	1	p_i
0	$\frac{8}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$
1	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
q_j	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

b) [0,5p] Să se afle variabilele aleatoare marginale X şi Y.

Sol:

$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

c) [0,5p] Să se decidă dacă variabilele aleatoare marginale sunt independente.

Sol:

d) [0,5p] Să se calculeze coeficientul de corelaţie dintre variabilele aleatoare marginale.

Sol:

$\rho(X,Y) = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$M(XY) = 0\cdot 0\cdot \frac{8}{10} + 0\cdot 1\cdot \frac{1}{10} + 1\cdot 0\cdot \frac{1}{10} + 1\cdot 1\cdot 0 = 0$

$M(X) = 0\cdot \frac{9}{10} + 1\cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$; $M(Y) = 0\cdot \frac{9}{10} + 1\cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

$M_2(X) = 0^2\cdot \frac{9}{10} + 1^2\cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$; $M_2(Y) = 0^2\cdot \frac{9}{10} + 1^2\cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

$D(X) = M_2(X) - M^2(X) = \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$

$D(Y) = M_2(Y) - M^2(Y) = \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{0 - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}} = -\frac{1}{9}.$