Cristian Neculăescu

Subiecte date la testul unic de la seminar, Algebră Liniară, perioada decembrie 2012

Varianta 1:

1. [3p] Se dau subspaţiile $U_1 = span\left\{(1,1,0),(0,1,1),(1,2,1)\right\}$ şi $U_2 = span\left\{(2,1,0),(0,1,2),(-2,0,2)\right\}$.

   i) [0,5p] Să se determine $\dim U_1$ şi $\dim U_2$ şi câte o bază în fiecare subspaţiu.

   ii) [1p] Să se determine subspaţiile $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ şi dimensiunile acestor subspaţii.

   iii) [0,5p] Să se enunţe şi să se verifice teorema dimensiunii a lui Grassmann pentru U_1 şi U_2.

   iv) [0,5p] Să se reprezinte un vector nenul al intersecţiei în baza $\mathbb{R}^3$, baza U_1 şi baza U_2.

   v) [0,5p] Să se cerceteze dacă $(0,0,0) = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in U_1$ şi $x_2 \in U_2$ se poate realiza în cel puţin două moduri distincte.

   Soluţie:

   i) Se studiază independenţa liniară a familiei $\left\{(1,1,0),(0,1,1),(1,2,1)\right\}$:

   matricea $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ are det $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$, aşa că familia este liniar dependentă; minorul det $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$ şi corespunde primilor doi vectori, aşa că familia $\left\{(1,1,0),(0,1,1)\right\}$ este bază (liniar independentă şi este sistem de generatori) pentru U_1, iar $\dim U_1 = 2$.

   Se studiază independenţa liniară a familiei $\left\{(2,1,0),(0,1,2),(-2,0,2)\right\}$:

   matricea $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ are det $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$, aşa că familia este liniar dependentă; minorul det $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ şi corespunde primilor doi vectori, aşa că familia $\left\{(2,1,0),(0,1,2)\right\}$ este bază (liniar independentă şi este sistem de generatori) pentru U_2, iar $\dim U_2 = 2$.

   ii) $U_1 + U_2 = span\left\{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0),(0,1,2)\right\}$; matricea $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ are minorul det $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, aşa că are rangul 3, o bază a lui $U_1 + U_2$ este $\left\{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0)\right\}$iar $\dim(U_1 + U_2) = 3$.

   Cum $U_1 + U_2$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 3 în $\mathbb{R}^3$, $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$.

   $U_1 \cap U_2$ este subspaţiul vectorial al vectorilor care sunt combinaţii liniare şi de $\left\{(1,1,0),(0,1,1)\right\}$ şi de $\left\{(2,1,0),(0,1,2)\right\}$, adică:

   $$(*)\ \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) = \alpha_3(2,1,0) + \alpha_4(0,1,2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_2 = 2\alpha_4 \end{cases}, \text{ cu soluţia: } \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha, \\ \alpha_2 = 2\alpha, \\ \alpha_3 = -\alpha, \\ \alpha_4 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   Se obţine:

   $U_1 \cap U_2 = \left\{\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) \middle| \underset{\substack{\text{soluţii ale} \\ \text{sistemului } (*)}}{\alpha_1,\alpha_2} \right\} = \left\{(-2\alpha)(1,1,0) + (2\alpha)(0,1,1);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(-2\alpha, 0, 2\alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\alpha(-2,0,2);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ [intersecţia din perspectiva bazei lui U_1]

   sau

   $U_1 \cap U_2 = \left\{\alpha_3(2,1,0) + \alpha_4(0,1,2) \middle| \underset{\substack{\text{soluţii ale} \\ \text{sistemului } (*)}}{\alpha_3,\alpha_4} \right\} = \left\{(-\alpha)(2,1,0) + \alpha(0,1,2);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\alpha(-2,0,2);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ [intersecţia din perspectiva bazei lui U_2] $\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

   iii) T. Grassmann: $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$.

   Pentru situaţia de faţă, din punctele i) şi ii) se ştie:

   $\dim(U_1 + U_2) = 3$, $\dim U_1 = 2$, $\dim U_2 = 2$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 1 \Rightarrow 3 = 2 + 2 - 1$

   iv) [vezi rezolvarea ii)]

   Un vector nenul al intersecţiei este (de exemplu) $(2,0,-2)$.

   Reprezentarea vectorului în baza lui U_1 este $[2,0,2]_{\{(1,1,0),(0,1,1)\}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, deoarece $-2\cdot(1,1,0) + 2\cdot(0,1,1) = (-2,0,2)$

   Reprezentarea vectorului în baza lui U_2 este $[2,0,2]_{\{(2,1,0),(0,1,2)\}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, deoarece $(-1)(2,1,0) + (0,1,2) = (-2,0,2)$.

Reprezentarea vectorului în baza standard $\mathbb{R}^3$ este $[(-2,0,2)]_E = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ iar în baza $\{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0)\}$ este $[(-2,0,2)]_{\{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0)\}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

v) $(0,0,0) = \underset{\in U_1}{(0,0,0)} + \underset{\in U_2}{(0,0,0)} = \underset{\in U_1}{(-2,0,2)} + \underset{\in U_2}{(2,0,-2)}$.

2. [2p] Se consideră funcţionala liniară $f(\cdot) : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, definită prin: $f(P(\cdot)) = P(2)$. Să se afle reprezentarea funcţionalei în bazele $\{1, X, X^2, X^3\}$ şi $\left\{1, \frac{X-2}{1!}, \frac{(X-2)^2}{2!}, \frac{(X-2)^3}{3!}\right\}$.

Soluţie:

$E = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B = \left\{1, \frac{X-2}{1!}, \frac{(X-2)^2}{2!}, \frac{(X-2)^3}{3!}\right\}$.

$P(\cdot) \in \mathbb{R}_3[X]$ este de forma $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. $[P(X)]_E = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$.

$P(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} [P(X)]_E$. Se observă că $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{bmatrix}$ [matricea ataşată funcţionalei are coloanele egale cu valoarea funcţionalei în fiecare vector al bazei]

Pentru baza B:

Matricea funcţionalei are drept coloane valorile funcţionalei în vectorii bazei $\left\{1, \frac{X-2}{1!}, \frac{(X-2)^2}{2!}, \frac{(X-2)^3}{3!}\right\}$:

Pentru polinomul $P_1(X) = 1$: $f(P_1(\cdot)) = P_1(2) = 1$

Pentru polinomul $P_2(X) = \frac{X-2}{1!}$: $f(P_2(\cdot)) = P_2(2) = 0$

Pentru polinomul $P_3(X) = \frac{(X-2)^2}{2!}$: $f(P_3(\cdot)) = P_3(2) = 0$

Pentru polinomul $P_4(X) = \frac{(X-2)^3}{3!}$: $f(P_4(\cdot)) = P_4(2) = 0$

Se obţine că matricea funcţionalei în baza B este $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Comentariu [nu este necesar pentru rezolvare]:

Pentru baza B se observă că vectorii bazei provin de la $T_{g(\cdot),n,a}(X)$ [polinomul Taylor de grad n în punctul a ataşat funcţiei $g(\cdot)$] [Analiza cls. XI]:

$$T_{g(\cdot),n,a}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

În situaţia de faţă, funcţia căreia i se calculează polinoamele Taylor în jurul lui 2 este polinomul generic $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, pentru care derivatele de ordin mai mare ca 3 sunt toate nule. Mai mult, $P(X)$ coincide cu polinomul Taylor de grad 3:

$$P(X) = \frac{P^{(0)}(2)}{0!} + \frac{P^{(1)}(2)}{1!} \cdot (X-2) + \frac{P^{(2)}(2)}{2!}(X-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}(X-2)^3$$

Derivatele polinomului sunt:

$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \Rightarrow P(2) = P^{(0)}(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3$

$P'(X) = P^{(1)}(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 \Rightarrow P^{(1)}(2) = a_1 + 4a_2 + 12a_3$

$P''(X) = P^{(2)}(X) = 2a_2 + 6a_3X \Rightarrow P^{(2)}(2) = 2a_2 + 12a_3$

$P'''(X) = P^{(3)}(X) = 6a_3 \Rightarrow P^{(3)}(2) = 6a_3$

Se obţine: $[P(X)]_B = \begin{bmatrix} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \\ 2a_2 + 12a_3 \\ 6a_3 \end{bmatrix}$, care înseamnă:

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = P(X) = \frac{a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3}{0!} + \frac{a_1 + 4a_2 + 12a_3}{1!} \cdot (X-2) + \frac{2a_2 + 12a_3}{2!}(X-2)^2 + \frac{6a_3}{3!}(X-2)^3$$

[egalitate care poate fi verificată prin calcul direct];

pentru $X = 2$ se obţine $f(P(\cdot)) = P(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 \\ 2a_2 + 12a_3 \\ 6a_3 \end{bmatrix}$.

3. [1p] Să se studieze natura familiei de funcţionale liniare (dependenţa/independenţa) $\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)\}$, unde $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ sunt definite prin: $f_1(x) = x_1 + x_2 - x_3$, $f_2(x) = x_1 - x_2 + x_3$, $f_3(x) = x_1 + 3x_2 - 3x_3$, iar $x = (x_1, x_2, x_3)$.

   Soluţie:

   Fie α_1, α_2, α_3 scalari astfel încât $\alpha_1 f_1(\cdot) + \alpha_2 f_2(\cdot) + \alpha_3 f_3(\cdot) = 0$ [0 este funcţionala identic nulă]

   $\Rightarrow \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

   $\Rightarrow \alpha_1(x_1 + x_2 - x_3) + \alpha_2(x_1 - x_2 + x_3) + \alpha_3(x_1 + 3x_2 - 3x_3) = 0, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

   $\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3)x_2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3)x_3 = 0, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

   $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha \\ \alpha_2 = \alpha \\ \alpha_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

   Se obţine că familia $\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)\}$ este liniar dependentă [deoarece sistemul are şi alte soluţii în afara celei nule].

   Comentarii:

   O dependenţă este: $2f_1(\cdot) = f_2(\cdot) + f_3(\cdot)$ [obţinută din soluţia sistemului].

   Problema poate fi abordată şi folosind matricile funcţionalelor:

   $f_1(x) = x_1 + x_2 - x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

   $f_2(x) = x_1 - x_2 + x_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

   $f_3(x) = x_1 + 3x_2 - 3x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

   iar studiul familiei de funcţionale este studiul familiei de vectori (linie) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\right\}$.

   Se observă că sistemul $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} = 0$ este acelaşi cu cel din rezolvare.

4. [2p] Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_2 \\ x_3' = x_1 + 3x_3 \end{cases}$.

   Să se folosească descompunerea Jordan $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ pentru a rezolva sistemul. Să se verifice soluţia găsită.

   Soluţie:

   Sistemul de ecuaţii diferenţiale este:

   $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_2 \\ x_3' = x_1 + 3x_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$

   $\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$ [cu $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$]

   $\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

   Fie $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' + 2x_3' \\ x_1' + x_2' + x_3' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistemul devine:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ 2y_2 + y_3 \\ 2y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_3' = 2y_3 \Rightarrow y_3(t) = c_3 e^{2t}$

$\Rightarrow y_2' = 2y_2 + y_3 \Rightarrow y_2' = 2y_2 + c_3 e^{2t} \Rightarrow y_2' e^{-2t} = 2y_2 e^{-2t} + c_3 \Rightarrow y_2' e^{-2t} - 2y_2 e^{-2t} = c_3 \Rightarrow \left(y_2 e^{-2t}\right)' = c_3 \Rightarrow y_2 e^{-2t} = c_3 t + c_2 \Rightarrow y_2(t) = c_3 t e^{2t} + c_2 e^{2t}$

$\Rightarrow y_1' = 2y_1 + y_2 \Rightarrow y_1' = 2y_1 + c_3 t e^{2t} + c_2 e^{2t} \Rightarrow y_1' e^{-2t} - 2y_1 e^{-2t} = c_3 t + c_2 \Rightarrow \left(y_1 e^{-2t}\right)' = c_3 t + c_2 \Rightarrow y_1 e^{-2t} = \frac{1}{2} c_3 t^2 + c_2 t + c_1 \Rightarrow y_3(t) = \frac{1}{2} c_3 t^2 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_1 e^{2t}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} c_3 t^2 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_1 e^{2t} \\ c_3 t e^{2t} + c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} c_3 t^2 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_1 e^{2t} \\ c_3 t e^{2t} + c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} c_3 t^2 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_1 e^{2t} \\ c_3 t e^{2t} + c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} c_3 t^2 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_1 e^{2t} \\ c_3 t e^{2t} + c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{2t} - 2c_3 e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} - t c_2 e^{2t} + 2t c_3 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} + t c_2 e^{2t} - t c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{2t} - 2c_3 e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} - t c_2 e^{2t} + 2t c_3 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} + t c_2 e^{2t} - t c_3 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Soluţia: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{2t} - 2c_3 e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} - t c_2 e^{2t} + 2t c_3 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} + t c_2 e^{2t} - t c_3 e^{2t} \end{bmatrix}$

Verificare:

$x_1' = \left(2c_2 e^{2t} - c_1 e^{2t} - 2c_3 e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} - t c_2 e^{2t} + 2t c_3 e^{2t}\right)' = -e^{2t}\left(2c_1 - 3c_2 + 2c_3 + 2t c_2 - 3t c_3 + t^2 c_3\right)$

$x_1 + x_2 - x_3 =$

$= \left(2c_2 e^{2t} - c_1 e^{2t} - 2c_3 e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} - t c_2 e^{2t} + 2t c_3 e^{2t}\right) + \left(c_3 e^{2t}\right) - \left(c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} + t c_2 e^{2t} - t c_3 e^{2t}\right) =$

$= 3c_2 e^{2t} - 2c_1 e^{2t} - 2c_3 e^{2t} - t^2 c_3 e^{2t} - 2t c_2 e^{2t} + 3t c_3 e^{2t} = -e^{2t}\left(2c_1 - 3c_2 + 2c_3 + 2t c_2 - 3t c_3 + t^2 c_3\right)$

$\Rightarrow x_1' = x_1 + x_2 - x_3$

$x_2' = \left(c_3 e^{2t}\right)' = 2c_3 e^{2t} = 2x_2 = 2\left(c_3 e^{2t}\right) \Rightarrow x_2' = 2x_2$

$x_3' = \left(c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} + t c_2 e^{2t} - t c_3 e^{2t}\right)' = e^{2t}\left(2c_1 - c_2 + c_3 + 2t c_2 - t c_3 + t^2 c_3\right)$

$x_1 + 3x_3 = \left(2c_2 e^{2t} - c_1 e^{2t} - 2c_3 e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} - t c_2 e^{2t} + 2t c_3 e^{2t}\right) + 3\left(c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 c_3 e^{2t} + t c_2 e^{2t} - t c_3 e^{2t}\right) =$

$= 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + t^2 c_3 e^{2t} + 2t c_2 e^{2t} - t c_3 e^{2t} = e^{2t}\left(2c_1 - c_2 + c_3 + 2t c_2 - t c_3 + t^2 c_3\right)$

$\Rightarrow x_3' = x_1 + 3x_3$.

5. [2p] Pentru operatorul care în baza standard are matricea $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, să se afle:

i) [0,5p] forma canonică Jordan,

ii) [1p] baza Jordan,

iii) [0,5p] să se verifice formula de schimbare a matricei asociate operatorului la trecerea la baza Jordan.

Soluţie:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\det(A - \lambda I_2) = (2 - \lambda)^2$; valori proprii $\lambda_1 = 2$, $n_1 = 2$

$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $(A - 2I_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$\ker (A - \lambda I_2) = \{(1,0)\,\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\ker (A - \lambda I_2)^2 = \mathbb{R}^2$

Se completează $\ker (A - \lambda I_2)$ până la $\ker (A - \lambda I_2)^2 = \mathbb{R}^2$ cu $(0,1)$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ este baza Jordan.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ este forma canonică Jordan a operatorului nilpotent ataşat.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ este forma canonică Jordan a operatorului iniţial.

Verificarea:

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ [nu era necesară şi verificarea pentru operatorul nilpotent]

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

6. [2p] În spaţiul vectorial $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ se consideră subspaţiile vectoriale $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$.

i) [0,5p] Să se definească noţiunea de subspaţiu.

ii) [0,5p] Să se definească noţiunea de suplement direct.

iii) [1p] Să se arate că, dacă $\mathbb{V}_1'$ este suplementul direct al lui $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ în $\mathbb{V}_1$ iar $\mathbb{V}_2'$ este suplementul direct al lui $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ în $\mathbb{V}_2$, atunci $\mathbb{V}_1' \cap \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_2' \cap \mathbb{V}_1 = \{0\}$.

Soluţie:

i) Un subspaţiu vectorial în $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ este o submulţime $\mathbb{V}_0 \subseteq \mathbb{V}$ care satisface:

1. $\forall x, y \in \mathbb{V}_0$, $x + y \in \mathbb{V}_0$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathbb{V}_0$, $\alpha x \in \mathbb{V}_0$.

ii) Pentru un subspaţiu $\mathbb{V}_0$ al lui $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$, se numeşte suplement direct un alt subspaţiu $\mathbb{V}_1$ al lui $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$, astfel încât $\mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$.

Alternativă:

Pentru un subspaţiu $\mathbb{V}_0$ al lui $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$, se numeşte suplement direct un alt subspaţiu $\mathbb{V}_1$ al lui $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$, astfel încât:

1. $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$

2. $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{0\}$.

iii)

$\mathbb{V}_1'$ este suplementul direct al lui $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ în $\mathbb{V}_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{V}_1' \subseteq \mathbb{V}_1 \\ (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) + \mathbb{V}_1' = \mathbb{V}_1 \\ (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) \cap \mathbb{V}_1' = \{0\} \end{cases}$$

$\mathbb{V}_2'$ este suplementul direct al lui $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ în $\mathbb{V}_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{V}_2' \subseteq \mathbb{V}_2 \\ (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) + \mathbb{V}_2' = \mathbb{V}_2 \\ (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) \cap \mathbb{V}_2' = \{0\} \end{cases}$$

$\mathbb{V}_1' \subseteq \mathbb{V}_1 \Rightarrow \mathbb{V}_1' \cap \mathbb{V}_2 = (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) \cap \mathbb{V}_1' = \{0\}$

$\mathbb{V}_2' \subseteq \mathbb{V}_2 \Rightarrow \mathbb{V}_2' \cap \mathbb{V}_1 = (\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) \cap \mathbb{V}_2' = \{0\}$.

7. [2p] Se consideră un operator care în baza standard are matricea $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

i) [0,5p] Să se definească noţiunile de nucleu şi de imagine a unui operator.

ii) [1p] Să se afle nucleul şi imaginea operatorului.

iii) [0,5p] Să se enunţe şi să se verifice Teorema dimensiunii pentru operatori.

Soluţie:

i) Fie $(\mathbb{V}_1, \mathbb{K})$ şi $(\mathbb{V}_2, \mathbb{K})$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$. Fie $U(\cdot) : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ un operator liniar.

Se numeşte nucleul operatorului mulţimea $\ker U(\cdot) = \{x \in \mathbb{V}_1;\ U(x) = 0\}$

Se numeşte imaginea operatorului mulţimea $\operatorname{Im} U(\cdot) = \{U(x);\ x \in \mathbb{V}_1\}$.

ii) Sistemul $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ are soluţiile $\begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \ker U(\cdot) = \{(-1, -1, 1)\,\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

Sistemul $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ este compatibil dacă $y_1 - y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha - \beta \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = \beta \end{cases}$

$\operatorname{Im} U(\cdot) = \{y \in \mathbb{R}^3;\ y_1 - y_2 + y_3 = 0\} = \{\alpha\,(1, 1, 0) + \beta\,(-1, 0, 1);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

iii) $(-1, -1, 1) \neq 0 \Rightarrow \dim \ker U(\cdot) = 1$.

Matricea $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ are rangul 2 $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} U(\cdot) = 2$.

T. dimensiunii pentru operatori: $\dim \mathbb{V}_2 = \dim \operatorname{Im} U(\cdot) + \dim \ker U(\cdot)$; în cazul de faţă, $3 = 2 + 1$.

Varianta 2:

1. [3p] Se dau subspaţiile $U_1 = span\{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ şi $U_2 = span\{(2,-1,0),(0,1,2),(-2,2,2)\}$.

   i) [0,5p] Să se determine $\dim U_1$ şi $\dim U_2$ şi câte o bază în fiecare subspaţiu.

   ii) [1p] Să se determine subspaţiile $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ şi dimensiunile acestor subspaţii.

   iii) [0,5p] Să se enunţe şi să se verifice teorema dimensiunii a lui Grassmann pentru U_1 şi U_2.

   iii) [0,5p] Să se reprezinte un vector nenul al intersecţiei în baza $\mathbb{R}^3$, baza U_1 şi baza U_2.

   iv) [0,5p] Să se cerceteze dacă $(0,0,0) = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in U_1$ şi $x_2 \in U_2$ se poate realiza în cel puţin două moduri distincte.

2. [2p] Se consideră funcţionala $f(\cdot) : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, definită prin: $f(P(\cdot)) = P(1)$. Să se afle reprezentarea funcţionalei în bazele $\{1, X, X^2, X^3\}$ şi $\left\{1, \frac{X-1}{1!}, \frac{(X-1)^2}{2!}, \frac{(X-1)^3}{3!}\right\}$.

3. [1p] Să se studieze natura familiei de funcţionale liniare (dependenţa/independenţa) $\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)\}$, unde $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ sunt definite prin: $f_1(x) = x_1 - x_2 + x_3$, $f_2(x) = x_1 + x_2 + x_3$, $f_3(x) = -x_1 + 3x_2 - 3x_3$, iar $x = (x_1, x_2, x_3)$.

4. [2p] Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases}$.

   Să se folosească descompunerea Jordan $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ pentru a rezolva sistemul. Să se verifice soluţia găsită.

5. [2p] Pentru operatorul care în baza standard are matricea $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, să se afle:

   i) [0,5p] forma canonică Jordan,

   ii) [1p] baza Jordan,

   iii) [0,5p] să se verifice formula de schimbare a matricei asociate operatorului la trecerea la baza Jordan.

6. [2p] În spaţiul vectorial $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ se consideră subspaţiile vectoriale $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$.

   i) [0,5p] Să se definească noţiunea de subspaţiu.

   ii) [0,5p] Să se definească noţiunea de suplement direct.

   iii) [1p] Să se arate că dacă $\mathbb{V}_1'$ este suplementul direct al lui $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ în $\mathbb{V}_1$ iar $\mathbb{V}_2'$ este suplementul direct al lui $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ în $\mathbb{V}_2$, atunci $(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) \cap (\mathbb{V}_1' + \mathbb{V}_2') = \{0\}$.

7. [2p] Se consideră un operator care în baza standard are matricea $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   i) [0,5p] Să se definească noţiunile de nucleu şi de imagine a unui operator.

   ii) [1p] Să se afle nucleul şi imaginea operatorului.

   iii) [0,5p] Să se enunţe şi să se verifice Teorema dimensiunii pentru operatori.

Varianta 3:

1. [3p] Se dau subspaţiile $U_1 = span\{(1,1,-1),(-1,1,1),(0,2,0)\}$ şi $U_2 = span\{(2,1,1),(1,1,2),(-1,0,1)\}$.

   i) [0,5p] Să se determine $\dim U_1$ şi $\dim U_2$ şi câte o bază în fiecare subspaţiu.

   ii) [1p] Să se determine subspaţiile $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ şi dimensiunile acestor subspaţii.

   iii) [0,5p] Să se enunţe şi să se verifice teorema dimensiunii a lui Grassmann pentru U_1 şi U_2.

   iii) [0,5p] Să se reprezinte un vector nenul al intersecţiei în baza $\mathbb{R}^3$, baza U_1 şi baza U_2.

   iv) [0,5p] Să se cerceteze dacă $(0,0,0) = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in U_1$ şi $x_2 \in U_2$ se poate realiza în cel puţin două moduri distincte.

2. [2p] Se consideră funcţionala $f(\cdot) : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, definită prin: $f(P(\cdot)) = P(-1)$. Să se afle reprezentarea funcţionalei în bazele $\left\{1, X, X^2, X^3\right\}$ şi $\left\{1, \frac{X+1}{1!}, \frac{(X+1)^2}{2!}, \frac{(X+1)^3}{3!}\right\}$.

3. [1p] Să se studieze natura familiei de funcţionale liniare (dependenţa/independenţa) $\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)\}$, unde $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ sunt definite prin: $f_1(x) = x_1 + x_2 - x_3$, $f_2(x) = x_1 - x_2 + x_3$, $f_3(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3$, iar $x = (x_1, x_2, x_3)$.

4. [2p] Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_2 \\ x_3' = x_1 \end{cases}$.

   Să se folosească descompunerea Jordan $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ pentru a rezolva sistemul. Să se verifice soluţia găsită.

5. [2p] Pentru operatorul care în baza standard are matricea $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, să se afle:

   i) [0,5p] forma canonică Jordan,

   ii) [1p] baza Jordan,

   iii) [0,5p] să se verifice formula de schimbare a matricei asociate operatorului la trecerea la baza Jordan.

6. În spaţiul vectorial $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ se consideră subspaţiile vectoriale $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$.

   i) [0,5p] Să se definească noţiunea de subspaţiu.

   ii) [0,5p] Să se definească noţiunea de sumă de subspaţii.

   iii) [1p] Să se arate că $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ (în sensul unicităţii descompunerii în sumă) dacă şi numai dacă $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$. (Nu poate fi folosită în demostraţie, ca argument, teorema de caracterizare a sumei directe).

7. [2p] Se consideră un operator care în baza standard are matricea $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   i) [0,5p] Să se definească noţiunile de nucleu şi de imagine a unui operator.

   ii) [1p] Să se afle nucleul şi imaginea operatorului.

   iii) [0,5p] Să se enunţe şi să se verifice Teorema dimensiunii pentru operatori.

Varianta 4:

1. [3p] Se dau subspaţiile $U_1 = span\{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\}$ şi $U_2 = span\{(2,0,1),(1,2,0),(-1,2,-1)\}$.

   i) [0,5p] Să se determine $\dim U_1$ şi $\dim U_2$ şi câte o bază în fiecare subspaţiu.

   ii) [1p] Să se determine subspaţiile $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ şi dimensiunile acestor subspaţii.

   iii) [0,5p] Să se enunţe şi să se verifice teorema dimensiunii a lui Grassmann pentru U_1 şi U_2.

   iii) [0,5p] Să se reprezinte un vector nenul al intersecţiei în baza $\mathbb{R}^3$, baza U_1 şi baza U_2.

   iv) [0,5p] Să se cerceteze dacă $(0,0,0) = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in U_1$ şi $x_2 \in U_2$ se poate realiza în cel puţin două moduri distincte.

2. [2p] Se consideră funcţionala $f(\cdot) : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$, definită prin: $f(P(\cdot)) = P(3)$. Să se afle reprezentarea funcţionalei în bazele $\{1, X, X^2, X^3\}$ şi $\left\{1, \frac{X-3}{1!}, \frac{(X-3)^2}{2!}, \frac{(X-3)^3}{3!}\right\}$.

3. [1p] Să se studieze natura familiei de funcţionale liniare (dependenţa/independenţa) $\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)\}$, unde $f_i(\cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ sunt definite prin: $f_1(x) = x_1 - x_2 + x_3$, $f_2(x) = x_1 - x_2 + x_3$, $f_3(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3$, iar $x = (x_1, x_2, x_3)$.

4. [2p] Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale $\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_3 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_3' = x_2 - 2x_3 \end{cases}$.

   Să se folosească descompunerea Jordan $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ pentru a rezolva sistemul. Să se verifice soluţia găsită.

5. [2p] Pentru operatorul care în baza standard are matricea $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, să se afle:

   i) [0,5p] forma canonică Jordan,

   ii) [1p] baza Jordan,

   iii) [0,5p] să se verifice formula de schimbare a matricei asociate operatorului la trecerea la baza Jordan.

6. [2p] Se consideră spaţiul vectorial $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ şi $\mathbb{V}_1, \cdots, \mathbb{V}_r$ subspaţii vectoriale ale sale.

   i) [0,5p] Să se definească noţinunea de subspaţiu vectorial.

   ii) [0,5p] Să se definească noţiunea de acoperire liniară a unei familii de vectori.

   iii) [1p] Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{r} \mathbb{V}_k = \text{span}_{\mathbb{K}} \left(\bigcup\limits_{k=1}^{r} \mathbb{V}_k \right)$.

7. [2p] Se consideră un operator care în baza standard are matricea $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   i) [0,5p] Să se definească noţiunile de nucleu şi de imagine a unui operator.

   ii) [1p] Să se afle nucleul şi imaginea operatorului.

   iii) [0,5p] Să se enunţe şi să se verifice Teorema dimensiunii pentru operatori.