Tipuri de subiecte din anii anteriori [subiectele similare/de acelaşi tip sunt numerotate la fel]

- **Subiectul I – 2 puncte.**
  Se dau vectorii $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (0, 1, -1)$, $b_3 = (2, -1, 4)$, $b_4 = (m, 0, 2)$, unde $m \in \mathbb{R}$, şi $X = span_{\mathbb{R}}(\{b_2, b_3, b_4\})$.

$(1p)$ a) Arătaţi că X este subspaţiu vectorial în $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ şi determinaţi dimensiunea sa.

$(1p)$ b) Folosind metoda de pivotare Gauss–Jordan să se determine coordonatele vectorului b_1 într–un reper al lui $(X, \mathbb{R})$ format doar din vectorii b_2, b_3, b_4, în situaţia în care $m = \frac{7}{3}$.

- **Subiectul I – 2 puncte.**
  În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se consideră vectorii:
  $v_1 = (1, 2, -2)$, $v_2 = (1, -2, 0)$, $v_3 = (-1, 0, 1)$, $v_4 = (1, -4, 1)$, $v_5 = (2, 0, 1)$ şi subspaţiile X_1 şi X_2, unde X_1 este generat de $\{v_2, v_3, v_4\}$ iar X_2 este generat de $\{v_1, v_5\}$. Să se determine:

$(0,5p)$ a) Câte o bază pentru X_1 şi X_2.

$(0,5p)$ b) Subspaţiul $Y = X_1 \cap X_2$ şi dimensiunea sa.

$(1p)$ c) Subspaţiul $X = X_1 + X_2$, dimensiunea sa şi să se verifice teorema dimensiunii (Grassman).

Exemple de subiecte care trebuie rezolvate clasic:

- **Subiectul II – 2 puncte.**
  Se consideră funcţionala pătratică definită pe $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$V(x) = f(x, x) = 2x_1^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$$

$(0,5p)$ a) Scrieţi matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice).

$(0,5p)$ b) Determinaţi funcţionala biliniară polară a funcţionalei pătratice.

$(1p)$ c) Determinaţi forma canonică a funcţionalei pătratice şi natura funcţionalei pătratice.

Subiectul II – 2 puncte.
Se consideră funcţionala pătratică definită pe $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$V(x) = f(x, x) = -x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

$(0,5p)$ a) Determinaţi matricea funcţionalei pătratice corespunzătoare reperului canonic (bazei canonice) din $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

$(0,5p)$ b) Determinaţi funcţionala biliniară polară a funcţionalei pătratice.

$(1p)$ c) Determinaţi forma canonică a funcţionalei pătratice precum şi baza formei canonice.

Subiectul III – 2 puncte
În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ se consideră X mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (-4, 3, 1)$.

$(1p)$ a) Să se determine o bază ortogonală a lui X.

$(1p)$ b) Să se determine proiecţia vectorului $v = (-2, -3, 1)$ pe X.

Subiectul III – 2 puncte
În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ se consideră vectorii $x = (1, 0, 1, 1)$, $a_1 = (3, 0, 1, -1)$, $a_2 = (8, -1, 5, -4)$, $a_3 = (4, 1, -1, 0)$ şi subspaţiul $X = span(\{a_1, a_2, a_3\})$. Să se determine:

$(1p)$ a) proiecţia ortogonală a vectorului x pe subspaţiul X;

$(1p)$ b) complementul ortogonal $X^\perp$ al subspaţiului X şi dimensiunea sa.

Exemple de subiecte scurte şi/sau tip grilă [subiectele similare/de acelaşi tip sunt numerotate la fel]:

- **Subiectul IV** $(\mathbf{10 \times 0,3 = 3}$**puncte**$)$

$(0,3p)$ 1) Definiţi subspaţiul propriu asociat valorii proprii λ a operatorului liniar $U : X \to X$.

$(0,3p)$ 1) Ce înseamnă că funcţionala pătratică $V : X \to \mathbb{R}$ este negativ definită?

$(0,3p)$ 1) Definiţi distanţa pe spaţiul vectorial real X.

$(0,3p)$ 1) Definiţi complementul ortogonal al unui subspaţiu vectorial.

$(0,3p)$ 1) În spaţiul $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ se consideră vectorii $v_1=(-2,1,1)$, $v_2=(1,3,-1)$, $v_3=(-1,-4,0)$, $v_4=(2,6,-2)$. Atunci:

(a) $\{v_1,v_2,v_4\}$ sistem liniar independent.
(b) $\{v_1,v_4\}$ sistem liniar dependent.
(c) $\{v_2,v_3\}$ sistem liniar dependent.
(d) $\{v_1,v_2\}$ sistem liniar independent.
(e) $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ reper în $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

$(0,3p)$ 2) Fie X, Y subspaţii liniare ale spaţiului liniar $(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$. Atunci:

(a) $\dim(X+Y)=\dim X-\dim Y+\dim(X\cap Y)$;
(b) $\dim(X+Y)=\dim X+\dim Y+\dim(X\cap Y)$
(c) $\dim X+\dim Y=\dim(X+Y)$
(d) $\dim X+\dim Y=\dim(X\cap Y)+\dim(X+Y)$
(e) $\dim X=2\dim(X+Y)-\dim Y-11$.

$(0,3p)$ 2) Fie X, Y subspaţii liniare ale spaţiului $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Atunci:

(a) $\dim(X\cap Y)=\dim(X+Y)-\dim X-\dim Y$;
(b) $\dim X+\dim Y=\dim(X+Y)+\dim(X\cap Y)$
(c) $\dim(X\cap Y)=\dim X+\dim Y+\dim(X+Y)$
(d) $\dim X+\dim Y=\dim(X+Y)$
(e) $2\dim X=\dim(X+Y)-2\dim Y$.

$(0,3p)$ 2) Fie $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un operator liniar. Atunci:

(a) $3\dim\operatorname{Im}U-\dim\ker U=\dim\operatorname{Im}U-3\dim\ker U$;
(b) $\dim\ker U=2-\dim\operatorname{Im}U$
(c) $\dim\ker U+\dim\operatorname{Im}U=5$
(d) $3\dim\ker U-\dim\operatorname{Im}U=\dim\ker U-3\dim\operatorname{Im}U$;
(e) $\dim\ker U+\dim\operatorname{Im}U=3$.

$(0,3p)$ 3) Fie $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un operator liniar. Atunci $x\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ este vector propriu dacă:

(a) $\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$, astfel încât $U(x)=2\lambda x$;
(b) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $U(\lambda x)=\lambda^2x$;
(c) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $U(2\lambda x+x)=2\lambda x$;
(d) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $U(\lambda x+x)=\lambda x$;
(e) $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, astfel încât $U(2x)\neq 2\lambda x$.

$(0,3p)$ 4) Fie $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un operator liniar a cărui matrice în reperul canonic al lui $(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ este A. Atunci:

(a) Dacă $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}$, atunci U are forma canonică Jordan;

(b) dacă $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, atunci U are forma canonică Jordan;

(c) dacă $A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-2&0\\-3&0&2\end{bmatrix}$, atunci U are forma diagonală.

(d) dacă $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$, atunci U are forma canonică Jordan;

(e) dacă $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$, atunci U nu este diagonalizabil.